NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours général de 1895

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 250-251

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__250_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895.

Mathématiques spéciales.

Première question. — On considère l'équation

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\lambda x + \mu)\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

1° Les constantes *réelles* a, b, c, λ, μ étant données, on demande de prouver que l'on peut choisir la constante k, de manière que l'équation précédente soit vérifiée par un polynome $y = f(x)$ de degré donné n.

2° On suppose ensuite que le trinome

$$ax^2 + bx + c$$

a ses racines a_0, a_1 *réelles* et *distinctes* et que, dans la décomposition de $\dfrac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$ en fractions simples définie par l'identité

$$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1},$$

les coefficients α_0, α_1 sont *positifs* et différents de zéro.

Démontrer que, dans ces conditions, l'équation

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre a_0 et a_1.

On examinera si cette équation peut avoir des racines multiples.

Deuxième question. — On donne une courbe du troisième degré C_3 définie par les équations

$$x = 6\lambda^2\mu, \qquad y = 6\lambda\mu^2, \qquad z = \lambda^3 + \mu^3,$$

où λ et μ désignent deux variables indépendantes que, pour abréger, nous appellerons les coordonnées du point a de la courbe C_3.

1° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de trois points a_1, a_2, a_3 de la courbe C_3 pour que ces points soient en ligne droite.

2° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de six points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 de cette courbe pour que ces points soient sur une conique.

Déduire de là la condition nécessaire et suffisante pour que, par trois points a_1, a_2, a_3 de la courbe C_3, on puisse faire passer une conique C_2, touchant C_3 aux points a_1, a_2, a_3.

Les côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$ coupent C_3 en des points b_1, b_2, b_3, situés sur une droite D.

Les droites qui touchent la courbe C_3 aux points a_1, a_2, a_3 la coupent en des points c_1, c_2, c_3 situés sur une droite Δ.

La droite D étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent?

La droite Δ étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent?