VLADIMIR VARICAK

Remarque sur la valeur de i^i

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 258-262
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__258_1>

REMARQUE SUR LA VALEUR DE i^i;

PAR M. VLADIMIR VARIĆAK,
Professeur à Osijek (Esseg), en Slavonie.

La vraie valeur de cette expression a été déterminée déjà par Euler. Prenant pour point de départ

$$\cos x + i \sin x = e^{ix},$$

équation fondamentale dans la théorie des imaginaires, on trouve

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Élevant de côté et d'autre à la puissance i, on obtient

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Jusqu'à ce moment j'estimai ce résultat incontestable; maintenant je trouve dans la *Géométrie de position* de Mouchot ([1]), à la page 146, le raisonnement que voici :

Comme il est certain que

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i},$$

Euler ne fait pas difficulté d'en conclure

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

et, par suite,

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}, \qquad \ldots.$$

Vallès conteste, non sans raison, l'exactitude des deux dernières formules, puisqu'il en résulterait

$$e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

d'où

$$e^{\pi} = -1,$$

conséquence absurde, et qui ne saurait provenir que d'une fausse hypothèse.

([1]) A. Mouchot, *Les nouvelles bases de la Géometrie superieure*. Paris, 1892.

Afin de donner les valeurs exactes, M. Mouchot évalue par son procédé purement géométrique les logarithmes de i^i et de $-i^i$. A la page 141 de l'Ouvrage cité, il donne les égalités

$$i^i = \pm i \qquad \text{et} \qquad -i^i = \mp i;$$

d'où il suit que i^i et $-i^i$ ont pour logarithmes, l'un $\pm \frac{\pi}{2} i$, l'autre $\mp \frac{\pi}{2} i$. Il en résulte

$$i^i = e^{\pm\frac{\pi}{2} i}, \qquad -i^i = e^{\mp\frac{\pi}{2} i},$$

et, si l'on applique à ces nouvelles formules le raisonnement de Vallès, on trouve

$$e^{\pm\frac{\pi}{2} i} + e^{\mp\frac{\pi}{2} i} = 0;$$

d'où

$$e^{\pm\pi i} = -1,$$

résultat exact (¹).

Tout cela m'étonnait bien. Je lus plusieurs fois ce passage; cela m'eût coûté beaucoup d'admettre que la déduction d'Euler soit erronée. Celle de Mouchot-Vallès me semblait l'être du moment où j'ai lu à la page 139 de l'Ouvrage cité « qu'élever une vectrice à la puissance i, c'est la convertir en une autre vectrice ayant pour logarithme le sien *changé de mode* », et pourtant quand l'auteur opère avec les angles, dont la tangente excède l'unité, il ne suit pas cette règle (²). Sur cette déduction douteuse s'appuie la détermination des logarithmes de i^i et de $-i^i$.

Je regrette que M. Mouchot n'ait pas dit où se trouve

(¹) Ouvrage cité, p. 147.

(²) *Voir* les quatre dernières lignes de la page 139.

la remarque de Vallès sur l'inexactitude de la formule d'Euler, car je voudrais bien connaître son analyse et savoir d'où il a tiré l'égalité

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Elle est évidemment fausse, et c'est bien difficile de croire qu'elle se trouve dans Euler. Après tout, il me semble qu'elle dérive d'un *lapsus calami*.

En faisant

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$$

et, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

on a, élevant à la puissance i,

$$(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Si l'on oublie de mettre la base $-i$ entre parenthèses, on a la seconde équation en question. Au moins j'ai en vain tenté de la déduire d'une autre manière. Mais il n'est pas permis d'omettre les parenthèses; $(-i)^i$ n'est pas égal à $-i^i$.

D'ailleurs on a

$$(-i)^i = \left(\frac{1}{i}\right)^i = \frac{1}{i^i} = i^{-i},$$

et enfin

$$i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

comme la seconde équation. Avec elle on ne peut tirer aucune conséquence absurde, mais avec celles de M. Mouchot on le peut de la manière suivante : nous avons vu qu'il est arrivé à l'égalité

$$i^i = e^{\pm \frac{\pi}{2}};$$

prenons les logarithmes népériens, nous aurons

$$ili = \pm \frac{\pi}{2} i$$

et, quand l'on supprime le facteur i, il vient

$$li = \pm \frac{\pi}{2},$$

conséquence absurde et qui est en contradiction avec l'expression donnée à la page 146,

$$li = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

k désignant un nombre quelconque ou zéro.