

RAYMOND SÉE

**Problème du concours général de 1894**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1895), p. 272-280

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1895\\_3\\_14\\_\\_272\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__272_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894;**

PAR M. RAYMOND SÉE,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Janson de Sailly.

---

On donne un triangle  $ABC$  dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases}$$

une conique  $S$  touchant en  $A$  et  $B$  les côtés  $CA$  et  $CB$  de l'angle  $ACB$  et dont l'équation est  $XY = Z^2$ .

Sur cette conique  $S$ , on prend le point  $\mu$  défini par les

équations  $X = Y = Z$ , et un point variable  $M$ ; enfin on désigne par  $\nu$  le point où la droite  $C\mu$  rencontre la corde de contact  $AB$ .

Cela posé, on joint le point  $M$  à l'un des points  $m$  de  $AB$  qui ont même polaire par rapport aux angles  $AMB$  et  $\mu M\nu$  :

1° Démontrer que,  $M$  décrivant  $S$ , la droite  $Mm$  enveloppe une courbe  $\Sigma$  du quatrième ordre et de la troisième classe, dont l'équation tangentielle est

$$u^3 + v^3 - uvw = 0.$$

2° Aux points où une droite  $D$  rencontre la courbe  $\Sigma$ , on mène à cette courbe les quatre tangentes  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , et l'on considère la conique  $C_1$  inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite  $AB$ . Démontrer que, si l'on assujettit  $C_1$  à passer par un point  $P$ , la droite  $D$  enveloppe une conique  $C_2$ ;

3° Montrer que la conique  $C_2$  se réduit à deux points  $f, f'$  quand le point  $P$  est sur une certaine conique  $C_3$ . Trouver dans ce cas l'enveloppe  $\Sigma'$  de la droite  $ff'$  et le lieu des points  $f$  et  $f'$ .

$$S \left\{ \begin{array}{l} XY - Z^2 = 0, \\ \mu \left\{ \begin{array}{l} X = Y = Z, \\ M\mu \left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{array} \right| = 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \quad X = 0, \\ CA \quad Y = 0, \\ AB \quad Z = 0, \end{array} \right. \nu \left\{ \begin{array}{l} X = Y, \\ Z = 0, \end{array} \right.$$

$$M \left\{ \begin{array}{l} X = \lambda Z, \\ Y = \frac{Z}{\lambda}, \end{array} \right. \rho \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ \frac{X}{-\lambda} = Y. \end{array} \right.$$

Les points de  $AB$ , qui ont même polaire par rapport



I.

$$M \begin{cases} X = \lambda Z, \\ Y = \frac{Z}{\lambda}, \end{cases} \quad m \begin{cases} Z = 0, \\ Y = \alpha X, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \lambda + 1 = 0,$$

$$M\mu \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha X + Y + Z \left( \lambda \alpha - \frac{1}{\lambda} \right) = 0.$$

J'identifie avec

$$uX + vY + wZ = 0,$$

$$\frac{-\alpha}{u} = \frac{1}{v} = \frac{\lambda \alpha - \frac{1}{\lambda}}{w}, \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{u}{v}, \\ \lambda \alpha - \frac{1}{\lambda} = \frac{w}{v}, \\ \alpha^2 \lambda + 1 = 0, \end{cases}$$

ou, en éliminant  $\alpha$  et  $\lambda$ ,

$$\Sigma \quad \{ u^3 + v^3 = uvw,$$

courbe de la troisième classe.

Pour avoir l'équation ponctuelle, je cherche l'enveloppe de

$$\alpha^3 Z - \alpha^2 X + \alpha Y - Z = 0$$

(obtenue en remplaçant  $\lambda$  dans  $Mm$ ), c'est-à-dire que j'élimine  $\alpha$  entre

$$\begin{cases} 3\alpha^2 Z - 2\alpha X + Y = 0, \\ \alpha^3 Z - \alpha^2 X + \alpha Y - Z = 0, \end{cases} \quad \Sigma \quad \{ (XY - 9Z^2)^2 - 4(3YZ - X^2)(3XZ - Y^2) = 0,$$

courbe du quatrième ordre.

II.

Soit une droite D de coordonnées  $u_0, v_0, w_0$ .

$$\Sigma = u^3 - v^3 - uvw = 0.$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial \Sigma}{\partial u} + v_0 \frac{\partial \Sigma}{\partial v} + w_0 \frac{\partial \Sigma}{\partial w} \\ = u_0(3u^2 - vw) + v_0(3v^2 - uw) - w_0 uv = 0 \end{aligned}$$

représente une conique tangente aux quatre droites  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . Elle est de plus tangente à  $AB$  (puisqu'il n'y a pas de terme en  $\omega^2$ ). Il n'y a qu'une seule conique tangente à cinq droites. L'équation précédente est donc celle de la conique  $C_1$ ,

$$C_1 = 3u_0u^2 + 3v_0v^2 - u_0v\omega - v_0\omega u - \omega_0\omega v = 0.$$

Soit

$$ux_0 + vy_0 + \omega z_0 = 0$$

l'équation d'un point  $P$ . Pour exprimer qu'il est sur la conique  $C_1$ , j'élimine  $\omega$  et j'exprime que l'équation homogène

$$3u_0u^2 + 3v_0v^2 - \omega_0uv + (u_0v + v_0u) \left( \frac{ux_0 + vy_0}{z_0} \right) = 0$$

a ses racines égales.

En supprimant les indices,

$$C_2 = (ux_0 + vy_0 + \omega z_0)^2 - 4(3uz_0 - vx_0)(3vz_0 - uy_0) = 0,$$

équation de la conique enveloppée par  $D$ .

### III.

Pour que la conique  $C_2$  se réduise à deux points, il faut que le premier membre de son équation soit une somme de deux carrés au plus. Il faut donc que les trois demi-dérivées partielles, égalées à zéro, aient en  $u, v, \omega$  un système commun de solutions, qui sont précisément les coordonnées de la droite  $ff'$ .

$C_2$  est de la forme  $R^2 - 4PQ = 0$ ,

$$(1) \quad \begin{cases} R = ux_0 + vy_0 + \omega z_0, \\ P = 3uz_0 - vx_0, \\ Q = 3vz_0 - uy_0, \\ x_0R - 2y_0P - 6z_0Q = 0, \\ y_0R - 6z_0P - 2x_0Q = 0, \\ z_0R = 0. \end{cases}$$

J'élimine P, Q, R : il vient

$$\begin{aligned} \text{AB} \quad Z &= 0, \\ \text{C}_3 &= XY - 9Z^2 = 0, \end{aligned}$$

conique bitangente à S aux deux points A et B.

*Enveloppe de ff'.* — Posons

$$P \begin{cases} X_0 = 3\lambda Z_0, \\ Y_0 = \frac{3Z_0}{\lambda}. \end{cases}$$

Il faut éliminer  $\lambda$  entre les deux équations auxquelles se réduit le système (1),

$$\begin{cases} Y_0 P + 3Z_0 Q = 0, \\ R = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u + \lambda v = 0, \\ 3 \left( u\lambda + \frac{v}{\lambda} \right) + w = 0, \end{cases}$$

$$\Sigma' = u^3 + v^3 - \frac{1}{3} uvw = 0.$$

*Lieu des points f et f'.* — Je remplace, dans  $C_2$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  en fonction de  $\lambda$ ,

$$\left( 3u\lambda + \frac{3v}{\lambda} + w \right)^2 - \frac{4}{\lambda} (3u + 3\lambda v)^2 = 0.$$

$C_2$  se décompose alors en deux fonctions linéaires, équations des points dont nous cherchons le lieu.

Soit

$$f = u\lambda + \frac{v}{\lambda} + \frac{w}{3} - \frac{v}{\sqrt{\lambda}} (u + \lambda v) = 0.$$

Je pose  $\sqrt{\lambda} = t$ ,

$$u(t^4 - 2t) + v(1 - 2t^3) + w \frac{t^2}{3} = 0.$$

Je résous donc les deux équations

$$\begin{cases} u(2t^3 - 1) - 3t^2 v + \frac{t}{3} w = 0, \\ u(3t) + (t^3 - 2)v - \frac{t^2}{3} w = 0, \end{cases}$$

et

$$\frac{u}{\frac{2t}{3}(t^3+1)} = \frac{v}{\frac{2t^2}{3}(t^3+1)} = \frac{w}{2(t^3+1)^2},$$

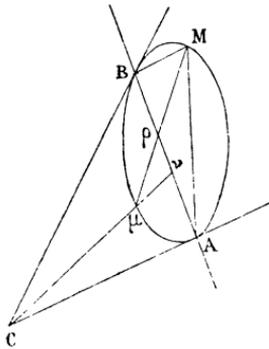
$$\left\{ \begin{array}{l} v = tu, \\ w = 3 \frac{(t^3+1)}{t} u, \end{array} \quad \Sigma' = u^3 + v^3 - \frac{1}{3} uvw = 0. \right.$$

L'enveloppe de  $ff'$ , le lieu de  $f$ , le lieu de  $f'$  sont donc une seule et même courbe : cette courbe  $\Sigma'$  est du quatrième ordre et de la troisième classe, comme  $\Sigma$ .

#### SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Les deux points  $m$ , qui ont même polaire par rapport aux deux angles  $AMB$ ,  $\mu M\nu$ , sont les points de  $AB$

Fig. 2.

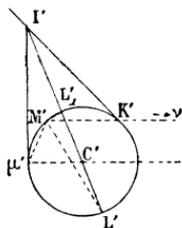


communs aux deux involutions définies par leurs points doubles  $A$ ,  $B$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ .

Cela posé, je projette la figure de manière que la droite  $AB$  devienne la droite de l'infini, et les points  $A$ ,  $B$  les points cycliques. La conique  $S$  devient un cercle de centre  $C'$  projection de  $C$ . Le point  $\mu$  devient un certain point  $\mu'$ .

Le faisceau en involution MA, MB se projette suivant un nouveau faisceau en involution. Ce dernier traçant sur la droite de l'infini une involution dont les points

Fig. 3.

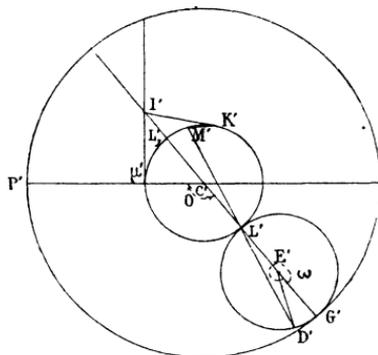


doubles sont les points cycliques est engendré par un angle droit tournant autour de  $M'$ , et son point image est  $C'$ , quel que soit  $M'$ .

Le deuxième faisceau en involution a pour point image le point  $I'$ . Par suite, les droites dont nous cherchons l'enveloppe sont les droites  $M'L'$ ,  $M'L'_1$ .

Cette enveloppe doit être une hypocycloïde à trois

Fig. 4.



rebroussements : car elle est de troisième classe, de quatrième ordre, et bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. De plus, cette hypocycloïde doit avoir

pour centre le point  $C'$  et pour cercle de roulement un cercle de rayon égal au triple de celui de  $S'$ , car les deux droites  $M'L'$  et  $M'L'_1$  sont rectangulaires, et l'on sait que le lieu des points, d'où l'on peut mener à l'hypocycloïde à trois rebroussements deux tangentes rectangulaires, est le cercle inscrit à cette hypocycloïde.

Nous allons le démontrer directement.

Considérons le cercle de centre  $C'$  et de rayon égal au triple de celui de  $S'$ , et le cercle de rayon égal à celui de  $S'$  tangent à  $S'$  en  $L'$ . La droite  $M'L'$  rencontre le second cercle en  $D'$ . Cherchons le lieu de  $D'$ ,

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi + G'E'D' = 2\pi + 2M'L'L'_1, \\ 2M'L'L'_1 &= M'C'\mu' - (\pi - O), \\ 2(\pi - O) &= \pi - M'C'\mu', \\ \omega + 2\pi + \pi - 2(\pi - O) - (\pi - O) &= 3O.\end{aligned}$$

$\omega = 3O$ . Donc  $D'$  décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, et l'on sait que la tangente à cette hypocycloïde en  $D'$  est la droite  $L'D'$ . Donc  $M'L'$  enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

La courbe  $\Sigma$  est donc la perspective d'une hypocycloïde à trois rebroussements.