NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation en 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 280-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__280_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGREGATION EN 1894 (1);

PAR M. J. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Douai.

L'équation générale des hyperboles équilatères qui déterminent sur Oy des segments ayant leur milieu au

(1) *Voir* 3e série, t. XIII, p. 503.

point O est

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Dx + F = 0.$$

Écrivant que les traces de ces courbes sur Ox partagent harmoniquement le segment AB, nous avons la condition

$$F + ab = -D(a+b),$$

de sorte que l'équation générale des hyperboles H est

$$(\mathrm{H}) \quad f(x,y) = x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Dx - ab - D(a+b) = 0.$$

I. Pour établir la première partie, il suffit de prouver qu'il y a une infinité de points dont les polaires, par rapport aux coniques (H), concourent.

La polaire d'un point $M(x_0, y_0)$, par rapport à H, a pour équation

$$x_0 x - y_0 y - ab + B(x_0 y + y_0 x) + D(x + x_0 - a - b) = 0.$$

Cette droite passera par un point fixe, quels que soient B et D, si l'on peut trouver x et y, de manière que

$$\begin{gathered} x_0 x - y_0 y - ab = 0, \\ x_0 y + y_0 x = 0, \\ x + x_0 - a - b = 0. \end{gathered}$$

Pour que ces trois équations, linéaires en x et y, aient une solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_0 & -y_0 & -ab \\ y_0 & x_0 & 0 \\ 1 & 0 & x_0 - a - b \end{vmatrix} = 0,$$

autrement dit, que le point M soit sur la courbe

$$(1) \qquad (x - a - b)(x^2 + y^2) + abx = 0.$$

Cette condition étant remplie, les polaires de M, par rapport aux hyperboles H, ont un point commun M', dont les coordonnées x_1, y_1 satisfont aux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0x_1 - y_0y_1 - ab = 0, \\ x_0y_1 + y_0x_1 = 0, \\ x_0 + x_1 - a - b = 0. \end{cases}$$

Ces conditions étant symétriques par rapport aux coordonnées de M et de M′, il y a réciprocité entre ces points; les polaires de M′, par rapport aux coniques (H), passent en M, et le point M′ appartient aussi à la courbe (1) : nous dirons que les points M et M′ sont conjugués.

Pour qu'une conique H se réduise à deux droites, il faut et il suffit que le centre de cette conique soit sur la courbe, c'est-à-dire que les équations

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'_x &= x + By + D = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_y &= -y + Bx = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_z &= Dx - ab - D(a+b) = 0 \end{aligned}$$

aient une solution en x, y, d'où une relation conditionnelle entre B et D; nous aurons le lieu des centres des coniques (H) ainsi réduites à deux droites en éliminant B et D entre les équations ci-dessus; nous obtenons ainsi

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ x & 0 & -y \\ 0 & x-a-b & -ab \end{vmatrix} = 0.$$

Nous retrouvons la courbe (1); donc les points M et M′ sont les centres d'hyperboles (H) réduites à deux droites.

II. La deuxième relation (2) $\dfrac{y_1}{x_1} = -\dfrac{y_0}{x_0}$ exprime que OM et OM′ sont également inclinées sur les axes de coordonnées; donc, les coniques de foyers M et M′, qui passent en O, sont l'une tangente, l'autre normale à Ox.

Si nous éliminons b entre les deux autres relations (2), nous avons

$$y_0 y_1 = (x_0 - a)(x_1 - a).$$

Cette relation exige que y_0 et y_1 d'une part, $(x_0 - a)$ et $(x_1 - a)$ d'autre part, soient à la fois de même signe ou de signes contraires, autrement dit que M et M' soient à la fois du même côté de Ox et de la droite $x - a = 0$, ou de part et d'autre de ces deux droites; elle exprime que le produit des distances des points M et M' à cette dernière droite est égal au produit des distances de ces points à Ox; il en résulte que la conique tangente à Ox en O, et ayant pour foyers M et M', est aussi tangente à la droite $x - a = 0$. On verrait de même qu'elle est tangente à la droite $x - b = 0$.

III. La troisième relation (2), mise sous la forme

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{a + b}{2},$$

montre que le lieu des milieux des segments MM' est la parallèle à Oy menée par le milieu de AB.

Le lieu S des points M et M' n'est autre que la courbe (1) obtenue plus haut.

C'est une cubique circulaire admettant Ox pour axe de symétrie, pour asymptote d'inflexion la droite

$$x - a - b = 0.$$

On la construit sans difficulté en résolvant son équation par rapport à y

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{a+b-x}}.$$

On peut supposer $b > a$ et distinguer quatre cas, selon que l'on a

1° $$b > a > 0,$$

2° $$b > 0 > a \quad \text{et} \quad b + a > 0,$$

3° $$b > 0 > a \quad \text{et} \quad b + a < 0,$$

4° $$0 > b > a.$$

On a les quatre formes correspondantes indiquées dans les *fig.* 1, 2, 3, 4.

Nous indiquerons, plus loin, un mode de construction de cette courbe par points et par tangentes.

IV. Montrons qu'elle peut se reproduire de trois manières par inversion.

D'abord, tout pôle d'inversion répondant à la question doit évidemment être sur la courbe; soit (x_0, y_0) un pareil point et une droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho \qquad (\text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1),$$

passant par ce point. L'équation aux ρ des points communs à la courbe et à cette droite est

$$(x_0 + \alpha\rho - a - b)[(x_0 + \alpha\rho)^2 + (y_0 + \beta\rho)^2] + ab(x_0 + \alpha\rho) = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que le pôle est sur la courbe, et supprimant le facteur ρ,

$$\begin{aligned} \alpha\rho^2 + [x_0 - a - b + 2\alpha(\alpha x_0 + \beta y_0)]\,\rho + \alpha(x_0^2 + y_0^2) \\ + 2(x_0 - a - b)(\alpha x_0 + \beta y_0) + ab\alpha = 0. \end{aligned}$$

Le produit des racines, qui a pour valeur

$$x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 - a - b)\left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\, y_0\right) + ab,$$

sera indépendant de α et β, si l'on a

$$(x_0 - a - b)\, y_0 = 0,$$

et seulement à cette condition. Le premier facteur donne le point de la courbe situé à l'infini sur l'asymptote réelle, qui est une solution singulière. L'autre facteur donne les trois pôles d'inversion O, A, B; on

Fig. 1.

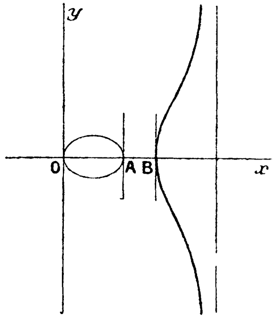


Fig. 2.

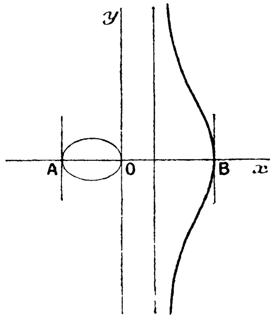


Fig. 3.

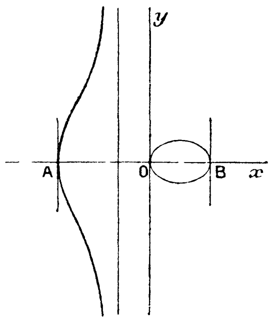
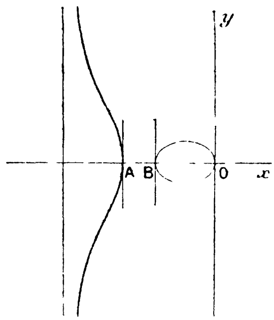


Fig. 4.



aurait sans peine les modules d'inversion correspondants.

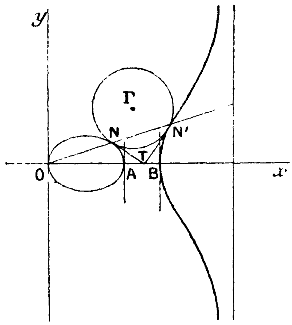
A chacun de ces pôles, on peut faire correspondre une famille de cercles qui touchent chacun la courbe S en deux points, et dont cette courbe est l'enveloppe.

D'abord, au pôle situé à l'infini dans la direction Oy, correspondent des cercles bitangents à S et ayant leurs centres sur Ox; nous ne nous y arrêterons pas.

Considérons le pôle O, qui permet de reproduire la courbe elle-même par inversion, et supposons, pour fixer les idées, $b > a > 0$ (*fig.* 1).

Soit (*fig.* 5) ONN′ une sécante quelconque passant par O : on sait que les tangentes en N et N′ à S forment avec NN′ un triangle isoscèle NTN′; par conséquent, le

Fig. 5.



cercle passant par N, N′, et tangent en N à la courbe S est aussi tangent à cette courbe en N′; la courbe S est l'enveloppe de ce cercle, quand la sécante tourne autour de O; les autres points communs à ce cercle et à S sont les points cycliques.

Cherchons l'équation de ce cercle que nous appellerons Γ; soit

$$y - \lambda x = 0$$

l'équation de la droite ONN′, l'équation

$$(\mathrm{S}) - k(y - \lambda x)^2 = 0,$$

où (S) représente le premier membre de l'équation (1), est l'équation générale des cubiques qui passent par les points communs à la cubique S et à la cubique

$$z(y - \lambda x)^2 = 0,$$

c'est-à-dire des cubiques circulaires tangentes à S en O, N et N′, et passant par le point à l'infini sur Oy.

La cubique formée de l'axe Oy et du cercle Γ est une de ces cubiques; nous aurons son équation en déterminant k de manière que x soit en facteur dans le premier membre de l'équation écrite plus haut, d'où

$$-k = a + b.$$

Cette équation devient alors

$$(x - a - b)(x^2 + y^2) + abx + (a + b)(y - \lambda x)^2 = 0,$$

d'où, en supprimant x dans le premier membre, l'équation du cercle Γ

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 + (\lambda^2 - 1)(a + b)x - 2\lambda(a + b)y + ab = 0.$$

Si l'on cherche l'enveloppe de ce cercle, on retrouve bien la courbe S.

Les équations du centre de Γ sont

$$2x + (\lambda^2 - 1)(a + b) = 0,$$
$$y - \lambda(a + b) = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on obtient

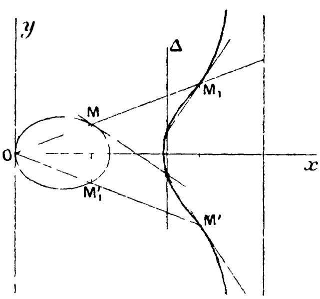
$$x^2 + y^2 = [x - (a + b)]^2,$$

qui représente la parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice l'asymptote de S : cette conique est le lieu des centres des cercles Γ.

Transportant l'origine en A, on verra de la même façon que la courbe S est l'enveloppe des cercles Γ' qui la touchent chacun en deux points en ligne droite avec A, et dont le lieu des centres est la parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice la parallèle à Oy menée par le point B; enfin, cette courbe est l'enveloppe des cercles Γ'' qui la touchent chacun en deux points en ligne droite avec B, et dont le lieu des centres est la parabole qui a pour foyer O et pour directrice la parallèle à Oy menée par A.

V. Soient M et M′ deux points conjugués (*fig*. 6); les droites OM et OM′ sont symétriques par rapport à Ox; OM coupe la courbe S en un troisième point M_1 symétrique de M′, OM′ coupe S en M'_1 symétrique de M.

Fig. 6.



D'après un théorème connu, les tangentes à S en O, M et M_1 coupent la courbe en trois points situés sur une droite Δ; comme la tangente en O coupe S en un troisième point à l'infini, Δ est perpendiculaire à Ox. De même, les tangentes en M′ et M'_1 coupent S en deux points situés sur une droite Δ′ perpendiculaire à Ox. Mais OMM_1 et $OM'M'_1$ étant symétriques par rapport à Ox, Δ et Δ′ sont également symétriques par rapport à Ox, et par suite se confondent. On en conclut que les tangentes en M et M′ concourent sur la courbe : ainsi le lieu du point de rencontre des tangentes à la courbe S en deux points conjugués M, M′ est la courbe elle-même.

Remarques. — 1° L'équation générale des hyperboles (H) contenant deux paramètres B et D au premier degré, ces coniques forment un réseau linéaire.

Si l'on astreint ces coniques à passer par un même point, l'équation ne renferme plus qu'un paramètre au premier degré; on conclut de là que les hyperboles H qui ont un point commun ont trois autres points communs.

La courbe S n'est autre chose que la hessienne du système des trois coniques

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - ab = 0, \\ xy = 0, \\ z(2x - a - b) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire le lieu des points dont les polaires, par rapport à ces trois coniques, concourent, et aussi le lieu du point commun à ces polaires.

Si M et M' sont deux points conjugués, OM et OM' forment avec Ox et Oy (2[e] conique) un faisceau harmonique, et sont par suite également inclinées sur les axes; M et M' étant conjugués par rapport à la troisième conique, qui se compose de la droite de l'infini du plan et de la droite

$$2x - a - b = 0,$$

le milieu de MM' est sur cette dernière droite; c'est bien ce que nous avons trouvé.

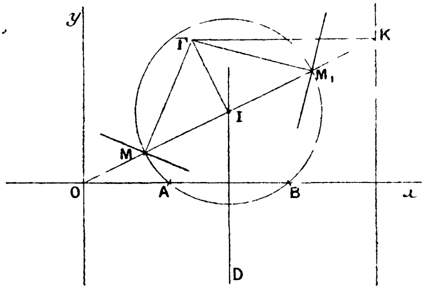
2° Il est facile de construire S par points et tangentes :

Supposons, par exemple, $b > a > 0$ et soit OMM_1 une sécante passant par O; la courbe S étant anallagmatique par rapport au point O pris pour pôle, nous avons (*fig.* 7)

$$OM \times OM_1 = OA \times OB,$$

et les quatre points M, M_1, A, B, sont sur un cercle. Nous avons vu que le milieu de MM' (M' symétrique de M_1 par rapport à Ox) est sur la perpendiculaire à AB en son milieu; le milieu I de MM_1 est aussi sur cette droite; par conséquent, I est le centre du cercle MM_1AB; d'où la construction suivante de S : par O, on mène une droite quelconque qui coupe en I la perpendiculaire D à AB en son milieu; sur cette droite, on prend $IM = IM_1 = IA$; les points M et M_1 appartiennent à la

Fig 7



courbe S; on retrouve facilement l'asymptote à l'aide de cette construction.

OMM_1 rencontre l'asymptote en K; la parallèle à Ox menée par K et la perpendiculaire en I à OMM_1 se coupent au centre Γ du cercle considéré plus haut; les perpendiculaires à ΓM et ΓM_1 en M et M_1 sont les tangentes en ces points à la courbe S.

3° Remarquons que O ayant la même puissance par rapport aux cercles Γ, ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe de centre O; de même les cercles Γ′ coupent orthogonalement un cercle fixe de centre A, et les cercles Γ″ un cercle fixe de centre B; les rayons de ces cercles sont respectivement $\sqrt{\overline{OA} \times \overline{OB}}$, $\sqrt{\overline{AB} \times \overline{AO}}$, $\sqrt{\overline{BO} \times \overline{BA}}$; deux sont donc réels et l'autre imaginaire.

Tout cercle coupe la courbe S aux points cycliques et en quatre points à distance finie; on démontre sans peine que, par ces quatre derniers points, on peut faire passer une hyperbole ayant pour asymptote l'asymptote de S; en particulier, par deux points de S en ligne droite avec O, A ou B, on peut faire passer une hyperbole tangente en ces points à S et admettant pour asymptote l'asymptote de S.

Si l'on cherche le lieu des points de rencontre des tangentes à S en deux points en ligne droite avec O, on obtient un cercle de diamètre OE, le point E étant le conjugué harmonique de O par rapport à A et B.

Du théorème invoqué dans la cinquième partie, il résulte que, si OMM_1 passe par un des points d'inflexion M_1 de la courbe, la tangente en M passe par l'autre.