MEYER

Étude sur un faisceau de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 291-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__291_1>

ÉTUDE SUR UN FAISCEAU DE CONIQUES;

PAR M. MEYER,
Professeur au lycée de Nancy.

Nous nous proposons de montrer comment on peut étendre à un faisceau de quatre coniques certaines propriétés bien connues du système de deux coniques. A cet effet, nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant données trois coniques d'un faisceau ponctuel (S, S', Σ), la droite AB qui joint un point quelconque A de la conique (S) à un point B de la conique (S') conjugué de A par rapport à (Σ) est tangente à une conique fixe, et le lieu du point de rencontre des tangentes à S et à S' aux points A et B est une conique du faisceau considéré. Soient en effet

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0$$

les équations des coniques (S, S') rapportées à leur triangle autopolaire commun, et $S - KS' = 0$ l'équation de (Σ). Si (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées des points A′ et B′ où AB rencontre Σ, les coordonnées des points A et B sont de la forme $(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$ et $(x_1-\lambda x_2, y_1-\lambda y_2, z_1-\lambda z_2)$. Écrivons que ces points appartiennent à S et à S′, on obtient

$$a(x_1+\lambda x_2)^2+b(y_1+\lambda y_2)^2+c(z_1+\lambda z_2)^2=0,$$
$$a'(x_1-\lambda x_2)^2+b'(y_1-\lambda y_2)^2+c'(z_1-\lambda z_2)^2=0,$$

et en retranchant de la première équation la deuxième multipliée par K

$$ax_1x_2+by_1y_2+cz_1z_2+K(a'x_1x_2+b'y_1y_2+c'z_1z_2)=0,$$

égalité qui montre que les points A′ et B′ sont conjugués par rapport à la conique $\Sigma'=S+KS'=0$.

Dès lors, la droite AB est coupée harmoniquement par les coniques Σ et Σ', et par suite a pour enveloppe une conique. Cette conique a pour équation tangentielle

$$(1)\qquad bcu^2+cav^2+abw^2=K^2(b'c'u^2+c'a'v^2+a'b'w^2).$$

De même, en exprimant que les tangentes à S, S′, aux points A et B, sont conjuguées par rapport à la conique

$$\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=\frac{1}{K}\left(\frac{u^2}{a'}+\frac{v^2}{b'}+\frac{w^2}{c'}\right),$$

on obtiendra l'équation ponctuelle du deuxième lieu

$$(2)\qquad ax^2+by^2+cz^2=\frac{abc}{K^2a'b'c'}(a'x^2+b'y^2+c'z^2);$$

c'est une conique du faisceau (S, S', Σ). Réciproquement si C, S, S′ sont trois coniques d'un faisceau ponctuel, et que d'un point M de l'une d'elles (C) on mène des tangentes MA, MB aux deux autres, les points A et B sont conjugués par rapport à l'une ou l'autre des coniques $\Sigma_1=S-KS'=0$, $\Sigma_2=S+KS'=0$.

La valeur de K se détermine en identifiant l'équation (2) avec l'équation de la conique C.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Si quatre coniques (S, S', S'', Σ) *d'un faisceau ponctuel sont telles qu'il existe un triangle conjugué par rapport à l'une d'elles* Σ, *et dont les sommets soient situés respectivement sur les trois autres, il en existe une infinité.*

Soient en effet

$$\begin{aligned} \Sigma &= x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ S &= ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \\ S' &= (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0, \\ S'' &= (a + K')x^2 + (b + K')y^2 + (c + K')z^2 = 0, \end{aligned}$$

et ABC un triangle remplissant les conditions de l'énoncé. Si le point A (x_1, y_1, z_1) se trouve sur la conique S, on a

$$(3) \qquad ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 0,$$

et la droite BC a pour équation

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

Mais, d'après ce qui précède, elle est tangente à la conique dont l'équation tangentielle est

$$[(b + K)(c + K) - (b + K')(c + K')]\, u^2 + \ldots = 0,$$

ou

$$(b + c + K + K')\, u^2 + \ldots = 0.$$

On a donc

$$(4) \qquad (b + c + K + K')\, x_1^2 + \ldots = 0.$$

En ajoutant les équations (3) et (4), il vient

$$(a + b + c + K + K')(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0$$

ou

$$(5) \qquad a + b + c + K + K' = 0,$$

car $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ n'est pas nul, puisque A n'est pas un point commun aux coniques du faisceau. Cette dernière relation étant indépendante du point A considéré, le théorème est démontré. Il y a plus, les sommets du triangle dont les côtés touchent respectivement les coniques S, S', S'' aux points A, B, C appartiennent à une conique fixe (E) du faisceau. En effet, les points de rencontre des tangentes à S et à S' aux points A et B a pour lieu la conique

$$(a+\text{K})x^2+\ldots=\frac{(a+\text{K})(b+\text{K})(c+\text{K})}{abc}[ax^2+\ldots]$$

ou

$$(6)\qquad a(a+\text{K})(a+\text{K}')x^2+\ldots=0,$$

en tenant compte de la relation (5). Il est clair qu'on trouverait le même lieu pour les autres sommets. Plus généralement, si l'équation de (Σ) est de la forme

$$(a+l)x^2+\ldots=0,$$

la conique (E) est représentée par

$$\frac{a(a+\text{K})(a+\text{K}')}{(a+l)^2}x^2+\ldots=0.$$

Réciproquement, soient $(\text{S}, \text{S}', \Sigma)$ trois coniques d'un faisceau ponctuel, si deux sommets d'un triangle conjugué par rapport à Σ décrivent respectivement les coniques S, S', le troisième sommet resté libre décrit une conique S'' du faisceau précédent.

Ces propriétés nous conduisent presque immédiatement à la proposition suivante, qui est due à Chasles :

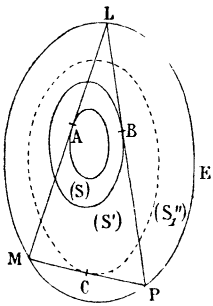
Étant données trois coniques (S, S', E) *d'un faisceau ponctuel, si un triangle* LMP *inscrit dans la conique* (E) *se déforme de manière que deux de ses côtés restent respectivement tangents aux coniques* S, S', *le* *troisième côté a pour enveloppe deux coniques du faisceau.*

Soient

$$E = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$S' = (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0$$

les équations des trois coniques.

Du point L, pris sur la première, menons les tangentes LA, LB aux deux autres. Les points A et B sont



conjugués par rapport à l'une des coniques Σ_1, Σ_2, soit Σ_1 par exemple. Cela étant, désignons par C le pôle de AB par rapport à cette conique. Lorsque le point L décrit la conique (E) le point C se déplace sur une conique (S_1'') du faisceau, car le triangle ABC est conjugué par rapport à Σ_1; de plus les tangentes en A, B, C aux coniques S, S', S_1'' se coupent aux points L, M, P situés sur une conique du faisceau.

Comme cette conique n'est autre que (E) elle-même, le théorème est démontré. Rien de plus simple, dès lors, que d'obtenir les équations des enveloppes S_1'', S_2''. Représentons en effet par

$$\Sigma_1 = (a+l)x^2 + (b+l)y^2 + (c+l)z^2 = 0,$$
$$S_1'' = (a+K')x^2 + (b+K')y^2 + (c+K')z^2 = 0,$$

les équations des coniques (Σ_1), (S_1'').

D'après les calculs précédents, l'équation de la conique (E) est de la forme

$$0 = \frac{a(a+K)(a+K')}{(a+l)^2}x^2 + \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2}y^2 + \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2}z^2,$$

d'où les relations

$$\frac{a(a+K)(a+K')}{(a+l)^2} = \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2} = \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2}.$$

Pour éliminer l entre ces équations, désignons par ρ la valeur commune de ces rapports.

L'expression $\dfrac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho$ s'annulant pour les valeurs a, b, c attribuées à x, on a identiquement

$$\frac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho \equiv \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+l)^2},$$

ou

$$x(x+K)(x+K') - \rho(x+l)^2 \equiv (x-a)(x-b)(x-c);$$

en identifiant, on trouve

$$K + K' + a + b + c = \rho,$$
$$abc = \rho l^2$$

et

$$[KK' - (ab+bc+ca)]^2 = 4abc(K+K'+a+b+c),$$

équation qui donne deux valeurs pour K', comme on devait s'y attendre.

Dans le cas particulier où $K = K' = 0$, les trois coniques S, S', S'' se confondent; l'égalité précédente devient

$$(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)=0.$$

C'est la relation connue

$$\theta'^2-4\Delta'\theta=0,$$

exprimant qu'il existe un triangle inscrit dans (E) et circonscrit à (S).