Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 304-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__304_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Les fonctions elliptiques et leurs applications, par M. *Alfred-George Greenhill*, professeur au collège d'Artillerie de Woolwich, traduit de l'anglais par M. *J. Griess*, professeur agrégé de Mathématiques au lycée d'Alger, avec une préface de M. *P. Appell*, membre de l'Institut. Paris, Georges Carré; 1895. Grand in-8° de XVIII-574 pages avec 28 figures dans le texte. Prix : 18fr.

Le goût naturel et l'éducation de beaucoup d'étudiants français les portent, quelquefois avec excès, vers les idées générales. Pour ne parler que de Mathématiques, quel professeur n'a rencontré des élèves de nos écoles et de nos lycées parfaitement instruits des théories générales et incapables d'en faire une application précise cependant très facile; possédant, par exemple, la notion d'intégrale définie dans toute sa rigueur sans savoir effectuer les quadratures les plus élémentaires.

Il est utile que quelques Ouvrages viennent réagir contre ces tendances ; pour cela, on ne peut trouver mieux que les livres anglais, dans la plupart desquels les idées générales sont amenées peu à peu par l'étude des faits mathématiques ou des questions posées par les Sciences physiques. C'est à ce titre que se recommande l'Ouvrage de M. Greenhill, dont on ne peut mieux caractériser l'esprit qu'en reproduisant la pensée de Fourier qui lui sert d'introduction :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

M. Greenhill se place ainsi à un tout autre point de vue que les auteurs des excellents Traités français sur les fonctions elliptiques : Briot et Bouquet, Halphen, MM. J. Tannery et Molk. Il renonce aux avantages d'unité et d'enchaînement logique que ces auteurs obtiennent en établissant d'abord, par des considérations générales ordinairement empruntées à la théorie moderne des fonctions, les formules et les théorèmes relatifs aux fonctions elliptiques, pour les appliquer ensuite à la Mécanique, à la Physique mathématique, à la Géométrie, à l'Arithmétique; mais il trouve, en revanche, l'avantage bien précieux d'intéresser immédiatement le lecteur qui n'est pas un pur mathématicien, en lui fournissant, dès les premières pages, de belles et importantes applications des fonctions elliptiques.

L'Auteur suit en cela une méthode d'exposition analogue à celle de M. Hermite, qui, dans son beau Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, commence par montrer comment un problème sur la chaleur conduit aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

M. Greenhill. en traitant d'abord des questions entièrement élémentaires, montre de même que les fonctions elliptiques s'imposent à l'Analyse pour la résolution de problèmes simples de Mécanique, Géométrie, Physique mathématique. Il commence par les anciennes méthodes de Legendre, Abel, Jacobi, en partant de la notion de l'intégrale elliptique et de la fonction inverse; il ne suppose donc chez le lecteur aucune connaissance sur la théorie générale des fonctions, ni sur la théorie particulière des fonctions elliptiques; et il l'amène peu à peu, par l'étude de problèmes élégamment choisis, sans caractère artificiel, à posséder tous les points essentiels du sujet.

La traduction de M. Griess n'est pas entièrement conforme à l'édition anglaise : M. Greenhill en a augmenté l'intérêt par des remaniements et d'importantes additions. Voici une analyse sommaire de l'Ouvrage.

Le livre débute par l'étude des oscillations du pendule simple; les expressions des coordonnées de l'extrémité du pendule en fonction du temps conduisent à la définition analytique des fonctions elliptiques d'une variable réelle et à leurs représentations géométriques et mécaniques. La périodicité du mouvement pendulaire conduit naturellement à la notion de la période réelle des fonctions elliptiques sn, cn, dn et aux formules donnant les valeurs de ces fonctions, quand on ajoute à l'argument la demi-période. La période imaginaire est ensuite introduite et interprétée mécaniquement, comme le produit de i par la période de l'oscillation d'un pendule décrivant l'arc supérieur du même cercle, sous l'action de la pesanteur changée de sens; c'est là une première addition à l'édition anglaise.

Après une courte digression sur la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions circulaires ou hyperboliques, l'auteur revient au mouvement pendulaire, et par la comparaison des mouvements de deux pendules, dont l'un fait des révolutions complètes, tandis que l'autre exécute des oscillations, il établit les formules qui correspondent à l'échange de module avec son inverse.

Puis, viennent quelques applications élégantes, surfaces minima, équation d'Euler, destinées à graver les premières formules dans l'esprit du lecteur.

Dans le second Chapitre, l'auteur considère les intégrales elliptiques de toutes les formes possibles; il donne leurs valeurs au moyen des fonctions elliptiques inverses; il introduit la notation de Weierstrass, quand le polynome sous le radical est du troisième degré.

Ces premières notions, dans le cas de la variable réelle, suffisent pour l'intelligence des applications géométriques et mécaniques auxquelles est consacré le Chapitre III. La variété des problèmes choisis en rend la lecture très intéressante, et contribue à familiariser le lecteur avec le maniement des formules.

Le Chapitre IV traite du théorème d'addition. Ce dernier est encore rattaché au mouvement simultané de deux pendules en retard l'un sur l'autre; l'auteur en déduit la construction de Jacobi, et une application des plus intéressantes à la construction des polygones de Poncelet, inscrits à un cercle et circonscrits à un autre. M. Greenhill, après avoir très heureusement modifié et complété la partie relative aux pentagones, montre comment ces résultats peuvent être identifiés avec ceux qu'Halphen a trouvés dans le deuxième Volume de son *Traité*, et donne quelques théorèmes nouveaux. Une dernière application se rapporte à la Trigonométrie sphérique et conduit au Tableau des trente-trois formules données par Jacobi dans ses *Fundamenta*.

Le Chapitre V envisage le théorème d'addition sous forme algébrique; sa lecture suppose la connaissance d'un certain nombre de théorèmes d'Algèbre supérieure relatifs à la théorie des formes.

Le Chapitre suivant conduit aux intégrales de deuxième et troisième espèces et aux fonctions $Z(u)$ et $\Pi(u, a)$.

Dans le Chapitre VII paraissent les fonctions $\zeta(u)$ et $\sigma(u)$ de Weierstrass. Elles servent à compléter la solution de problèmes qui n'avaient pu être terminés précédemment (chaînette en rotation, élastique gauche algébrique, pendule sphérique, toupie). Le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de troisième espèce est établi par une extension de la méthode d'Abel, précédemment employée : elle conduit tout naturellement à la considération des intégrales pseudo-elliptiques. Toute cette partie a été profondément remaniée par M. Greenhill; les calculs ont été plus développés et appliqués à la détermination de certaines herpolhodies algébriques (déjà faite par Halphen), ainsi qu'à l'élastique gauche.

La double périodicité des fonctions elliptiques est mise en évidence par la considération des ovales de Descartes (Chapitre VIII). Puis vient un Chapitre très original, sur les développements des fonctions elliptiques en produits de facteurs et en séries; ces problèmes sont rattachés à des questions de Physique mathématique, et en particulier aux théories électriques de Maxwell.

Le dernier Chapitre se rapporte à la théorie de la transformation. Après l'avoir d'abord rattachée aux considérations physiques du Chapitre précédent, l'auteur reprend la théorie algébrique générale, en suivant la méthode indiquée par Jacobi dans ses *Fundamenta*. Un nombre considérable de résultats sont indiqués dans ce Chapitre.

En résumé, le principal caractère du livre de M. Greenhill est d'intéresser le lecteur aux fonctions elliptiques, en montrant comment leur théorie se rattache à la résolution de toutes sortes de problèmes de Géométrie, de Mécanique, de Physique. Cet Ouvrage rendra de grands services à tous ceux qui désirent étudier cette théorie: aux physiciens et aux ingénieurs, il fournira un instrument de calcul puissant, avec des exemples variés sur la manière de l'appliquer; aux étudiants en Mathématiques, il facilitera l'intelligence des débuts de la théorie et inspirera la curiosité de lire les grands Traités; même pour les candidats à la Licence mathématique et physique, la lecture des cinq premiers Chapitres sera des plus aisées; elle leur apprendra rapidement le maniement des fonctions elliptiques avec les notations de Jacobi et de M. Weierstrass.

Terminons en signalant la façon particulièrement élégante dont M. Greenhill a donné des exemples d'intégrales pseudo-elliptiques, notamment dans le mouvement du pendule conique et dans celui d'un corps pesant autour d'un point fixe : ces exemples sont tirés d'un Mémoire étendu sur les intégrales pseudo-elliptiques que M. Greenhill vient de publier dans les *Proceedings of the London mathematical Society* et qui se rattache directement aux paragraphes correspondants de son livre. Un autre point, sur lequel M. Greenhill a fait des recherches personnelles d'un grand intérêt, est la théorie des équations modulaires; le Mémoire original de l'auteur, cité avec éloge par Halphen, vient d'être traduit par M. Laugel, dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

P. Appell.