NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN LÉVY

Sur la composition d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 329-339

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__329_1>

SUR LA COMPOSITION D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

On lira peut-être avec intérêt la solution du problème que j'ai proposé, cette année, pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE. — *Former l'équation de la surface du deuxième degré* (S) *qui contient trois droites données* D, D′ *et* OA.

Cette première Partie est traitée dans tous les cours, en faisant un choix particulier d'axes; la méthode est la même quand les axes sont quelconques. Je prendrai les équations des droites D et D′ sous leur forme la plus réduite en faisant observer que les formes à cinq ou six paramètres apparents, qui sont presque exclusivement usitées dans l'enseignement à cause de la symétrie qui en résulte pour les formules, ne doivent pas faire oublier les formes à quatre paramètres effectifs, bien plus maniables dans les applications.

Soient

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} \mathrm{D} = x - az - b = 0, \\ \mathrm{D}_1 = y - cz - d = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{D}')\qquad \begin{cases} \mathrm{D}' = x - a'z - b' = 0, \\ \mathrm{D}'_1 = y - c'z - d' = 0 \end{cases}$$

les équations des droites D et D';

$$(OA) \qquad \begin{cases} z = 0, \\ y = mx \end{cases}$$

celles de OA.

La méthode classique consiste à faire passer par la première droite un plan

$$(1) \qquad D - \lambda D_1 = 0,$$

par la seconde droite un plan

$$(2) \qquad D' - \lambda' D'_1 = 0,$$

et à exprimer que la droite représentée par ces deux équations rencontre OA, ce qui s'exprime en faisant $z = 0$ et $y = mx$ dans ces deux équations, et en écrivant que les deux valeurs de x ainsi obtenues sont égales :

$$x - b - \lambda(mx - d) = 0,$$
$$x - b' - \lambda'(mx - d') = 0,$$

d'où la condition

$$\frac{1 - \lambda m}{1 - \lambda' m} = \frac{b - \lambda d}{b' - \lambda' d'},$$

ou

$$(3) \quad b' - b + \lambda(d - b'm) + \lambda'(bm - d') + \lambda\lambda' m(d' - d) = 0.$$

L'équation cherchée s'obtient en éliminant λ et λ' entre les équations (1), (2) et (3). On obtient ainsi l'équation de (S)

$$(S) \qquad \begin{cases} (b' - b) D_1 D'_1 + (d - b'm) D D'_1 \\ \quad + (bm - d') D' D_1 + D D' m(d' - d) = 0. \end{cases}$$

Cette équation contient le paramètre m au premier degré, comme on pouvait le prévoir, puisque ces surfaces (S) ont, au fond, huit points communs, savoir : trois en ligne droite sur D, trois sur D', un en O, et un sur la droite qui joint les traces sur xOy de D et de D', droite qui appartient à (S) puisque xOy est un plan tangent.

Deuxième Partie. — *La surface* (S) *et la surface* (Σ) *analogue qui contient les droites* Δ, Δ' *et* OA *se coupent, en dehors de* OA, *suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe lorsque* OA *décrit le plan* xOy.

Ordonnons l'équation (S) par rapport au paramètre m qui va varier

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} &[(d'-d)\mathrm{DD}'+b\,\mathrm{D}'\mathrm{D}_1-b'\mathrm{DD}'_1]m\\ &\quad+(b'-b)\mathrm{D}_1\mathrm{D}'_1+d\mathrm{DD}'_1-d'\mathrm{D}'\mathrm{D}_1=0.\end{aligned}\right.$$

On aura de même l'équation de (Σ) en mettant simplement des lettres grecques au lieu de lettres françaises, savoir pour les droites

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta &= x-\alpha z-\beta=0,\\ \Delta_1 &= y-\gamma z-\delta=0,\end{aligned}\right.$$

$$(\Delta')\quad \left\{\begin{aligned} \Delta' &= x-\alpha' z-\beta'=0,\\ \Delta_1 &= y-\gamma' z-\delta'=0,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{aligned} &[(\delta'-\delta)\Delta\Delta'+\beta\,\Delta'\Delta_1-\beta'\Delta\Delta'_1]m\\ &\quad+(\beta'-\beta)\Delta_1\Delta'_1+\delta\Delta\Delta'_1-\delta'\Delta'\Delta_1=0.\end{aligned}\right.$$

Le lieu cherché s'obtiendra donc par l'élimination de m et aura pour équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(d'-d)\mathrm{DD}'+b\,\mathrm{D}'\mathrm{D}_1-b'\mathrm{DD}'_1}{(\delta'-\delta)\Delta\Delta'+\beta\,\Delta'\Delta_1-\beta'\Delta\Delta'_1}\\ &\qquad=\frac{(b'-b)\mathrm{D}_1\mathrm{D}'_1+d\mathrm{DD}'_1-d'\mathrm{D}'\mathrm{D}_1}{(\beta'-\beta)\Delta_1\Delta'_1+\delta\Delta\Delta'_1-d'\Delta'\Delta_1}.\end{aligned}\right.$$

Le lieu est en apparence du quatrième degré, mais il est évident que l'équation précédente se décompose en deux dont l'un doit être $z=0$ (le lieu de OA qui, d'après l'énoncé, est étranger). Vérifions ce point : pour cela, il suffit de développer l'équation précédente en supprimant la lettre z.

Le premier numérateur devient ainsi

$$(d'-d)(x-b)(x-b')$$
$$+b(x-b')(y-d)-b'(x-b)(y-d'),$$

ou

$$(d'-d)x^2+(b'd-bd')x+(b-b')xy,$$

ou, enfin

$$x[(d'-d)x+(b-b')y+b'd-bd'].$$

Un calcul aussi court donnerait le second numérateur; mais on peut remarquer qu'il se déduit du premier par l'échange simultané des lettres z et y, b et d, b' et d'. Il s'écrit donc

$$y[(b'-b)y+(d-d')x+d'b-db'],$$

et le rapport des deux numérateurs a pour valeur $-\frac{x}{y}$.

Le rapport des deux dénominateurs, qui n'en diffère que par l'emploi des lettres grecques, a donc aussi pour valeur $-\frac{x}{y}$, et les termes indépendants de z disparaissent dans l'équation (4) qui, par conséquent, s'abaisse au troisième degré. Elle ne peut d'ailleurs s'abaisser davantage; car l'équation (4) montre que les quatre droites font partie du lieu et, comme ces droites sont quelconques, elles ne peuvent être sur une quadrique.

Le lieu est donc certainement une surface de troisième degré S_3, dont l'équation sera

$$\frac{1}{z}(LM'-ML')=0.$$

si l'on écrit l'équation (4) ainsi

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'}.$$

Il n'y a évidemment aucun intérêt à développer davantage pour le moment.

Remarque. — On peut remarquer qu'il était inutile d'astreindre la droite OA à décrire un plan fixe; cela résulte immédiatement de la manière classique de construire, par points, la cubique gauche intersection des surfaces (S) et (Σ).

Par le point O, *on mène un plan quelconque : soient* a, a' *les points où il coupe* D *et* D'; α, α' *ses points d'intersection avec* Δ *et* Δ'. *Le point* M *où se coupent* aa' *et* $\alpha\alpha'$ *décrit la surface* S_3. Il paraît que ce mode de génération se trouve indiqué dans Schrœter; je n'ai pas eu le temps de le vérifier. Il a été aussi trouvé par M. F. Deruyts (*Bulletin de l'Académie royale de Bruxelles*, p. 35; 1891) dans un intéressant Mémoire sur les droites des surfaces cubiques, auquel j'ai fait de nombreux emprunts.

TROISIÈME PARTIE. — *Trouver les droites de la surface.*

Le calcul faisait immédiatement découvrir les quatre droites données D, D', Δ et Δ'. Quelques candidats ont écrit ainsi l'équation (4)

$$\frac{D'(bD_1 - dD) - D(b'D'_1 - d'D')}{\Delta'(\beta\Delta_1 - \delta\Delta) - \Delta(\beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta')}$$
$$= \frac{D_1(b'D'_1 - d'D') - D'_1(bD_1 - dD)}{\Delta_1(\beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta') - \Delta'_1(\beta\Delta_1 - \delta\Delta)},$$

et trouvé deux nouvelles droites

$$(G)\quad \begin{cases} bD_1 - dD = 0, \\ b'D'_1 - d'D' = 0, \end{cases} \qquad (\Gamma)\quad \begin{cases} \beta\Delta_1 - \delta\Delta = 0, \\ \beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta' = 0; \end{cases}$$

ce sont celles qui passent par O et s'appuient sur un des couples D, D' ou Δ, Δ'.

C'est par des considérations géométriques, comme d'ailleurs il convenait, que toutes les droites ont été trouvées. Il suffisait pour cela de recourir à deux considérations simples : 1° toute droite qui a quatre points sur une surface du troisième degré en fait partie, ce qui donnait les sécantes K et K' communes aux quatre droites données ; 2° tout plan qui coupe une surface cubique suivant deux droites la coupe suivant une autre droite. Ces deux théorèmes bien connus, et qui ne sont pas particuliers aux surfaces du troisième ordre, suffisaient, avec la détermination directe des six premières droites signalées qui se faisait sans peine et que je passe sous silence, pour abréger. Les lecteurs des *Nouvelles Annales* trouveront plus loin une Note de M. d'Ocagne sur ce même sujet ; je n'insisterai donc pas davantage.

Je ne résiste pas cependant au plaisir de signaler la très élégante classification des 27 droites que m'a signalée M. E. Blutel ; le plan GΓ coupe les droites K et K' suivant une droite L qui est évidemment sur la surface (quatre points communs). Considérons maintenant les cinq droites D, D', Δ, Δ' et L qui coupent K et K' : chacune d'elles avec K ou K' détermine un plan où se trouve une nouvelle droite, soit dix en tout.

Trois quelconques d'entre elles avec K et K' déterminant surabondamment un hyperboloïde qui coupe S_3 suivant une nouvelle droite, soit dix hyperboloïdes et dix nouvelles droites, ce qui fait le compte. Si K et K' sont imaginaires, les dix plans donnent dix droites imaginaires, et les dix hyperboloïdes dix droites réelles, en tout douze droites imaginaires et quinze réelles.

J'indiquerai dans une Note le degré de généralité du mode de génération qui faisait l'objet du problème.

Quatrième Partie. — *Étudier complètement la surface* S_3 *dans le cas particulier où les quatre droites* D, D', Δ *et* Δ' *sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point* O; *et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point* O (et que le plan tangent en O à l'hyperboloïde demeure invariable).

Pour me conformer au texte que les candidats ont eu entre les mains, je laisserai d'abord de côté le dernier membre de phrase.

Voici d'abord le calcul. Les quatre droites étant sur un hyperboloïde H et faisant partie d'un même système sont rencontrées par une même génératrice G de l'autre système passant par O; profitant de l'indétermination possible du plan des xy que j'ai signalée dans la remarque qui suit la seconde Partie, je prendrai G pour axe des x et le plan tangent à l'hyperboloïde en O comme plan des xy. L'équation de l'hyperboloïde sera de la forme

$$Py + Qz = 0,$$

avec

$$P = Ax + By + Cz, \qquad Q = Ex + Fz + G.$$

La droite (D) aura pour équations

$$(5) \qquad \begin{cases} y = cz, \\ Pc + Q = 0. \end{cases}$$

De même (D′), (Δ), (Δ′)

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{cases} y = c'z, \\ \mathrm{P}c' + \mathrm{Q} = 0, \end{cases}$$

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} y = \gamma z, \\ \mathrm{P}\gamma + \mathrm{Q} = 0, \end{cases}$$

$$(\Delta') \qquad \begin{cases} y = \gamma' z, \\ \mathrm{P}\gamma' + \mathrm{Q} = 0. \end{cases}$$

On peut utiliser les calculs de la seconde Partie, et écrire immédiatement l'équation du lieu (4) en y faisant

$$d = d' = \delta = \delta' = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{b\mathrm{D}'\mathrm{D}_1 - b'\mathrm{D}\mathrm{D}'_1}{\beta\Delta'\Delta_1 - \beta'\Delta\Delta'_1} = \frac{(b'-b)\mathrm{D}_1\mathrm{D}'_1}{(\beta'-\beta)\Delta_1\Delta'_1}.$$

Si l'on fait $y = cz$ dans la seconde équation (5), il vient

$$\mathrm{P}c + \mathrm{Q} + c\mathrm{B}(cz - y) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{P}c + \mathrm{Q} + c\mathrm{B}(cz - y)}{\mathrm{E} + \mathrm{A}c}, \qquad \mathrm{D}' = \frac{\mathrm{P}c' + \mathrm{Q} + c'\mathrm{B}(c'z - y)}{\mathrm{E} + \mathrm{A}c'},$$

$$b = -\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E} + \mathrm{A}c}, \qquad b' = -\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E} + \mathrm{A}c'},$$

et l'équation devient

$$\frac{-\mathrm{G}[\mathrm{P}c' + \mathrm{Q} + c'\mathrm{B}(c'z - y)](y - cz) + \mathrm{G}[\mathrm{P}c + \mathrm{Q} + c\mathrm{B}(cz - y)](y - c}{-\mathrm{G}[\mathrm{P}\gamma' + \mathrm{Q} + \gamma'\mathrm{B}(\gamma'z - y)](y - \gamma z) + \mathrm{G}[\mathrm{P}\gamma + \mathrm{Q} + \gamma\mathrm{B}(\gamma z - y)](y - \gamma'}$$
$$= \frac{(y - cz)(y - c'z)(c' - c)\mathrm{A}}{(y - \gamma z)(y - \gamma' z)(\gamma' - \gamma)\mathrm{A}}.$$

Ordonnons le premier numérateur par rapport aux lettres c, c', après l'avoir divisé par G,

$$\mathrm{Q}z(c - c') + \mathrm{P}y(c - c') + \mathrm{B}(c' - c)(y - cz)(y - c'z).$$

Multiplions les deux termes du deuxième rapport par $-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ et ajoutons au premier rapport terme à terme, nous obtenons la nouvelle proportion

$$\frac{Qz + Py}{Qz + Py} = \frac{(y - cz)(y - c'z)}{(y - \gamma z)(y - \gamma' z)}.$$

Sous cette forme, on voit que le lieu se décompose en deux

$$Qz + Py = 0$$

qui est l'hyperboloïde donné, et

$$(y - cz)(y - c'z) - (y - \gamma z)(y - \gamma' z) = 0$$

qui se compose du plan $z = 0$ et du plan

$$(cc' - \gamma\gamma')z + (\gamma + \gamma' - c - c')y = 0.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Soit A le point où OA rencontre (H). J'appellerai toujours premier système de génératrices celui qui contient deux des quatre droites, quel que soit d'ailleurs l'hyperboloïde considéré. Cela posé, par A il passe deux génératrices de (H), l'une g du premier système, l'autre g' du deuxième : g' rencontre D, D', Δ, Δ' et OA ; elle est donc commune aux deux quadriques S et Σ qui ont dès lors trois génératrices communes G, g' du deuxième système et OA du premier. Ces deux quadriques ont donc une quatrième génératrice commune g'' du premier système. Lorsque OA pivote autour de O, g' décrit l'hyperboloïde (H) qui fait donc partie de l'intersection ; g'', qui n'est pas sur (H), décrit la partie restante du lieu, c'est-à-dire un plan. Étant du premier système, g'' coupe G, le plan que l'on vient de trouver passe par G.

Reste ce qu'on pouvait dire sur le second membre de phrase ; le calcul répondait nettement. Les candidats qui ont déterminé le plan ont remarqué qu'il passait par G ; ils ne pouvaient pas dire autre chose. Ils liront dans les feuilles de M. Croville-Morant, qu'ils ont entre les mains, l'élégante démonstration, due, je crois, à M. Antomari, et prouvant que ce plan est conjugué du plan tangent en O à l'hyperboloïde dans l'involution déterminée par les deux couples de plans OD, OD′ et O Δ, O Δ′. Ce point se vérifierait sans peine sur l'équation que j'ai donnée plus haut.

Note. — Voici quelques détails complémentaires sur le nombre des droites et sur le degré de généralité de la surface qu'on trouvait. Le nombre des conditions (19), qui résultait de l'énoncé, ne prouvant rien, il faut raisonner autrement et recourir à la théorie des surfaces du troisième degré.

On sait depuis longtemps (voir *Quarterly Journal*, t. II, p. 114 et suiv.; 1857, Schläffli) qu'il y a deux cent seize manières de grouper les 27 droites d'une surface en couples de deux droites ne se rencontrant pas. $\Big($En effet, chacune des 27 droites est rencontrée par 10 autres; donc 16 ne la rencontrent pas, et, comme chaque couple est obtenu de deux manières, on a en tout $\frac{16 \times 27}{2} = 216$ couples$\Big)$. Prenons pour K et K′ les deux droites d'un de ces couples; K et K′ ont cinq sécantes communes, qui peuvent être associées de quinze manières en deux couples D, D′ et Δ, Δ′ de droites ne se coupant pas, ce qui donne déjà $216 \times 15 = 3240$ groupements des 27 droites en paires de deux droites ne se rencontrant pas. Prenons une de ces paires de deux droites (nos droites D, D′ et Δ, Δ′); il n'existe qu'un point O, d'où partent une droite rencontrant D et D′ sans rencontrer Δ, ni Δ′ et une droite rencontrant Δ et Δ′ sans rencontrer D ni D′ (ce point se détermine facilement à l'aide des notations de Schläffli employées par

M. d'Ocagne). Donc toute surface du troisième ordre peut être engendrée de 3240 manières par le procédé de l'énoncé. Mais, dans ce que je viens de dire, je n'ai pas distingué le réel de l'imaginaire; en se plaçant au point de vue du réel, il faut exclure, au moins, les surfaces cubiques qui n'ont que trois droites réelles.