VAHLEN

Sur la surface de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 344-347
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__344_1>

SUR LA SURFACE DE FRESNEL;

PAR M. LE D[r] VAHLEN.

Nous cherchons l'équation de la surface de Fresnel pour n dimensions.

La variété ellipsoïdale $\mathfrak{F}$, définie par l'équation

$$\sum_i a_i x_i^2 = 1, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

est coupée par une variété plane $\mathfrak{E}$ de $n - 1$ dimensions, passant par le centre de $\mathfrak{F}$. Nous élevons des perpendiculaires sur $\mathfrak{E}$ au centre, égales aux demi-axes principaux de la variété ellipsoïdale Φ, commune à $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{E}$. En variant $\mathfrak{E}$, les points extrêmes de ces perpendiculaires décrivent la variété de Fresnel, dont nous voulons établir l'équation.

Nous transformons l'équation de $\mathfrak{F}$ par la substitution orthogonale

$$x_i = \sum_k x_{ik} \xi_k, \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Soit $\xi_x = 0$ l'équation de la variété plane $\mathfrak{E}$, l'équation de Φ sera

$$\sum_{i,k}\xi_i\xi_k\sum_h a_h x_{hi} x_{hk} = 1 \quad \begin{pmatrix} i,k=1,\dots,n-1 \\ h=1,\dots n \end{pmatrix}.$$

En désignant par α le carré inverse d'un demi-axe principal de Φ, les $n-1$ valeurs de α sont les racines de l'équation de Laplace, ici de l'équation

$$\left|\sum_h a_h x_{hi} x_{hk} - \delta_{ik}\alpha\right| = 0 \quad \begin{pmatrix} h=1,\dots,n \\ i,k=1,\dots,n-1 \\ \delta_{ik}=0,\ \delta_{ii}=1 \end{pmatrix}.$$

Ordonnée suivant les puissances de α, cette équation s'écrira

$$\left|\sum_h a_h x_{hi} x_{hk}\right|_{i,k\neq n} - \alpha\sum_{n_1=1}^{n}\left|\sum_h a_h x_{hi} x_{hk}\right|_{i,k\neq n,n_1}$$
$$+\alpha^2\sum_{n_1,n_2=1}^{n}\left|\sum_h a_h x_{hi} x_{hk}\right|_{i,k\neq n,n_1,n_2} - \dots(-1)^{n-1}\alpha^{n-1} = 0.$$

Nous appliquons le théorème de Cauchy, concernant la somme des carrés des déterminants d'un système oblong et nous obtenons

$$\left|\sqrt{a_h}\, x_{hi}\right|^2_{i\neq n} - \alpha\sum_{n_1=1}^{n}\left|\sqrt{a_h}\, x_{hi}\right|^2_{i\neq n,n_1}$$
$$+\alpha^2\sum_{n_1,n_2=1}^{n}\left|\sqrt{a_h}\, x_{hi}\right|^2_{i\neq n,n_1,n_2} - \dots(-1)^{n-1}\alpha^{n-1} = 0 \quad (h,i=1,\dots,n).$$

Au moyen d'un théorème connu sur les subdéterminants de systèmes orthogonaux ([1]), l'équation se trans-

---

([1]) Si (a_{ik}), $(i,k=1,\dots,n)$ est un système orthogonal, le carré d'une matrice du système est égal au carré de la matrice adjointe; par exemple,

$$|a_{ik}|^2\begin{pmatrix} i=1,\dots,\nu \\ k=\mu+1,n \end{pmatrix} = |a_{ik}|^2\begin{pmatrix} l=\nu+1,\dots,n \\ k=1,\dots,\mu \end{pmatrix}.$$

formera dans la suivante :

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{x_{hn}^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2 = 1 \\ h_1 < h_2}}^{n} \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2}}$$

$$+ \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3 = 1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^{n} \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2 + x_{h_3 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{\sum_{h=1}^{n} x_{hn}^2}{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0.$$

Posons

$$x_{in} = \sqrt{\alpha} . \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les variables ξ_i sont les coordonnées du point extrême du demi-axe principal $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, normal à $\mathfrak{C}$ au centre; et l'équation de la variété de Fresnel devient

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\xi_h^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2 = 1 \\ h_1 < h_2}}^{n} \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2}{a_{h_1} a_{h_2}}$$

$$+ \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3 = 1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^{n} \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2 + \xi_{h_3}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0.$$

Dans cette équation, $\frac{\xi_h^2}{a_h}$ est multiplié par

$$1 - \sum_{h_1=1}^{n} \frac{\alpha}{a_{h_1}} + \sum_{h_1, h_2 = 1}^{n} \frac{\alpha^2}{a^{h_1} a^{h_2}} - \ldots (-1)^{n-1} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1} = 1}^{n} \frac{\alpha^{n-1}}{a_{h_1} a^{h_2} \ldots a_{h_{n-1}}},$$

$$(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1} \neq h),$$

c'est-à-dire par

$$\frac{\prod_i \left(1 - \frac{\alpha}{a_i}\right)}{1 - \frac{\alpha}{a_h}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

C'est par cette remarque que l'équation se réduira à celle-ci :

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{a_h - \alpha} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n).$$

A l'aide de l'identité

$$\alpha \sum_h \xi_h^2 = 1, \quad \text{ou} \quad \sum_h \left(\frac{a_h \alpha}{a_h - \alpha} - \frac{\alpha^2}{a_h - \alpha} \right) \xi_h^2 = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

l'équation prendra la forme finale

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_h}} = 1.$$

En supposant l'équation de $\mathfrak{F}$ donnée dans la forme

$$\sum_h \frac{x_h^2}{c_h^2} = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

l'équation de la variété de Fresnel sera

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\sum_i \xi_i^2 - c_h^2} = 1 \qquad (h, i = 1, \ldots, n).$$