NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur le rayon de courbure des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 365-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__365_0>

SUR LE RAYON DE COURBURE DES CONIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Le théorème énoncé dans le numéro d'août 1894 (p. 338) des *Nouvelles Annales* n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

(A) *Les coniques harmoniquement circonscrites à une conique et la touchant en un même point* M *ont, en ce point, le même rayon de courbure, égal à la moitié de celui de la conique.*

Prenons comme axes de coordonnées la tangente et la normale en M. La conique S a pour équation

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0, \tag{1}$$

et le rayon de courbure au point M est égal au coefficient e.

La conique (1) a pour équation tangentielle

$$e^2u^2 - 2beu + 2ev + b^2 - c = 0. \tag{2}$$

D'autre part, l'équation générale des coniques tangentes à la conique S au point M s'écrit :

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + y(mx + ny + p) = 0. \tag{3}$$

Pour exprimer que la conique représentée par l'équation (3) est harmoniquement circonscrite à la conique S, on sait qu'il suffit d'annuler la somme des produits des coefficients des termes correspondants dans les équations (2) et (3). On a ainsi la relation

$$e^2 + 2e\frac{(p+2e)}{2} = 0,$$

ou

$$p = -3e.$$

Or le rayon de courbure ρ des coniques (3) est égal à $\frac{p+2e}{2}$. Remplaçons p par $-3e$, il vient

$$\rho = -\frac{e}{2},$$

ce qui démontre le théorème.

Dans le système des coniques harmoniquement circonscrites à la conique S et la touchant au point M se trouvent un cercle et une hyperbole équilatère. Le cercle, comme nous l'avons démontré ailleurs, est celui qui coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique. La construction de son centre fournit immédiatement le centre de courbure de la conique au point M.

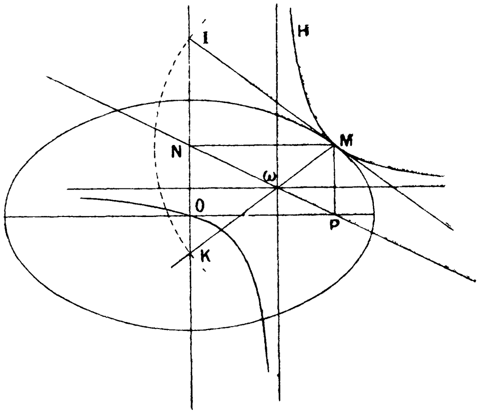
D'autre part, O étant le centre de la conique, le triangle ayant pour sommets le point O et les points à l'infini dans les directions des axes de la conique lui est conjugué.

Toute conique circonscrite à ce triangle est une hyperbole équilatère. On peut alors énoncer le théorème suivant, corollaire du précédent :

Le rayon de courbure en un point M *d'une conique est égal au double de celui de l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique, la touchant au point* M *et passant par son centre.*

On peut donc ramener la construction du centre de courbure au point M à la conique S à celui de l'hyperbole équilatère H au même point. Il suffit pour cela de déterminer le centre de la conique H. Ce centre est d'abord situé sur la droite PN, joignant les projections du point M sur les deux axes (1). D'autre part, dans une hyperbole, la tangente MI, une parallèle OI à une asymptote et le diamètre aboutissant au point M forment

Fig. 1.



ment un triangle isoscèle ; si donc on décrit du point M la circonférence de rayon MI, rencontrant OI au point K, la droite MK est un diamètre de l'hyperbole H. Son centre est donc au point d'intersection de MK avec PN.

De là résulte la construction suivante. Elle n'exige pas la connaissance des sommets ni des foyers de S, et est peut-être la plus simple solution du problème suivant :

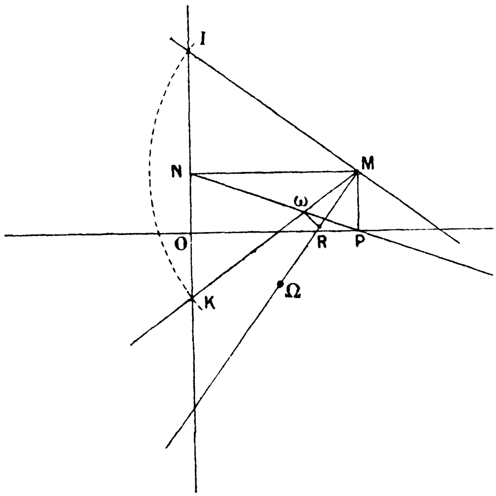
Construire le centre de courbure en un point M *d'une conique non tracée, connaissant les axes en position seulement et la tangente au point* M.

On prendra l'intersection ω de la droite NP, joignant

(1) D'après ce théorème : Si l'on mène par deux points d'une hyperbole les parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale du parallélogramme formé passe par le centre.

les projections du point M sur les axes avec la droite MK, telle que MK $=$ MI. La perpendiculaire ωR à Mω rencontrant la normale au point R, on portera RΩ $=$ RM. Le point Ω sera le centre de courbure cherché.

Fig. 2.



Remarque. — Le théorème démontré au début peut être déduit d'une proposition bien plus générale, donnée par M. Jamet dans sa thèse *Sur les courbes et les surfaces tétraédrales*. M. Jamet démontre que les courbes, représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^m = 0,$$

ont, en un point M, un rayon de courbure égal à la fraction $\frac{2}{1-m}$ de celui de la conique circonscrite au triangle de référence et touchant la courbe au point M. Si l'on fait $m = 2$, la courbe est une conique conjuguée au triangle de référence et l'on voit que son rayon de courbure en M est égal au double de celui de la conique la touchant au point M et circonscrite au triangle de référence. On voit facilement qu'on déduit de ce résultat le théorème (A).

On démontrerait de même, directement, le théorème suivant, qui est également une conséquence du théorème de M. Jamet :

Les coniques circonscrites aux triangles circonscrits à une conique S *et la touchant en un point* M *ont, en ce point, le même rayon de courbure, égal au quart de celui de la conique* S.

En appelant F le foyer d'une parabole, I et J les points cycliques, le triangle FIJ est circonscrit à la parabole. Donc (résultat connu) :

Le rayon de courbure en un point M *d'une parabole est égal à quatre fois le rayon du cercle tangent à la parabole au point* M *et passant par son foyer.*