NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LEINEKUGEL

Note sur une méthode nouvelle de transformation et sur les quartiques unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 391-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__391_1>

NOTE SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE DE TRANSFORMATION ET SUR LES QUARTIQUES UNICURSALES;

Par M. G. LEINEKUGEL,

Élève au lycée Charlemagne.

Nous nous proposons d'exposer une méthode nouvelle de transformation dans laquelle correspond à un point une conique, circonscrite à un triangle donné, qui constitue la figure de référence de cette méthode de transformation, à une droite un point, et à une conique une quartique unicursale. Toutes les propriétés *projectives* des coniques permettront d'énoncer immédiatement des propriétés relatives anx quartiques unicursales. Nous retrouverons, en particulier, par une voie purement géométrique, quelques-unes des propriétés de ces courbes que M. Astor a énoncées dans un Article très intéressant paru dans les *Nouvelles Annales*.

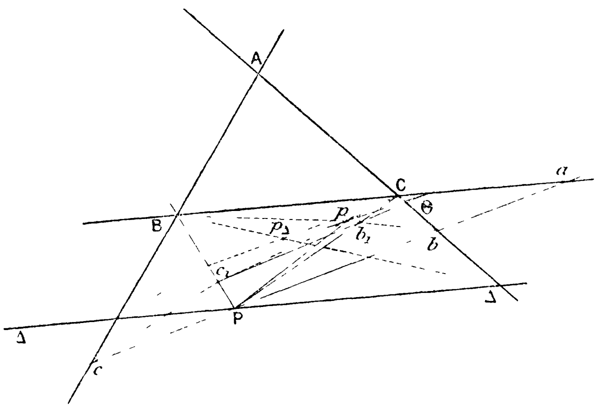
Les deux propriétés qui servent de base à cette méthode de transformation sont les suivantes :

I. *Étant donnés un triangle et un point* P, *on considère une série de droites pivotant autour de ce point, les droites qui joignent deux des sommets du triangle aux points de rencontre de ces droites avec les côtés opposés se coupent en un point qui décrit une conique* (P).

II. *Lorsque le point* P *décrit une droite* Δ, *les coniques correspondant aux différents points de cette droite passent par un quatrième point fixe.*

I. En effet, soit Pcb une de ces droites qui rencontre en b, c les côtés AC, AB du triangle donné ABC. Les droites Cc, Bb sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets B, C. Le point p de rencontre de ces droites décrit, par suite, une conique (P), passant par les trois sommets A, B, C (BA, CA étant évidemment deux rayons homologues) du triangle. Les tangentes en B, C sont les droites PB, PC qui sont les rayons correspondants de BC, dans les deux faisceaux. Quant à la tangente en A, c'est la droite

Fig. 1.



conjuguée harmonique de PA par rapport aux deux côtés AB, AC du triangle. Ceci résulte de la construction de la tangente en un point quelconque p de (P). D'après le théorème de Pascal, la tangente en p à (P) rencontre BC au même point Θ que la droite $b_1 c_1$ qui joint les points b_1, c_1 de rencontre des droites PC, Bb; PB, Cc. Or les droites $p\Theta$ et pP sont deux diagonales du quadrilatère formé par les quatre points B, C, b_1, c_1 (*fig.* 1), qui forment bien avec les côtés Cp, Bp un faisceau harmonique.

Cette conique (P), qui correspond au point P, est donc bien déterminée.

Voici un autre mode de génération de cette conique (P) :

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P *aux coniques passant par deux sommets* B, C *d'un triangle* ABC *et rencontrant les deux autres côtés en deux points situés en ligne droite avec* P *est la conique* (P).

Ou, ce qui revient au même, d'après le théorème de Desargues :

Étant donné un triangle ABC *on considère une série de droites pivotant autour d'un point* P, *le lieu des points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points* (P, a), (b, c) *est la conique* (P).

Ce dernier mode de génération de (P) permet de construire ses directions asymptotiques, puisqu'il suffit de tracer les deux droites Pa, bc qui sont telles que les milieux des segments Pa, bc coïncident. Ces droites passeront donc par les deux points communs à la droite et à la conique lieu des points milieux des segments Pa, bc.

II. Cette propriété résulte immédiatement du premier mode de génération de la conique (P). Si le point P se déplace sur une droite Δ, le réseau des coniques (P) qui correspondent aux différents points de cette droite passeront toutes par le point p_Δ obtenu comme précédemment, Pcb coïncidant avec Δ (*fig.* 1).

Courbe transformée d'une courbe donnée. — Nous supposons maintenant que le point P décrit une courbe quelconque (C) de degré m, aux différents points P correspondent des coniques (P) dont l'enveloppe est une courbe (Γ) qui est la *transformée* de la courbe (C). Nous nous proposons de tracer cette courbe par points et par tangentes et d'en indiquer le degré dans le cas général.

Au point P de la courbe (C) correspond une conique (P), définie comme il a été dit plus haut; à la tangente Δ à (C) en ce point correspond un point p, appartenant à (P); je dis que c'est en ce point que la conique (P) touche son enveloppe (Γ). En effet, considérons une sécante passant par P et infiniment voisine de Δ, elle rencontre (C) en des points dont l'un d'eux P′ est infiniment voisin de P, et auquel correspond une conique (P′) rencontrant (P) au point p', infiniment voisin de p puisqu'il correspond à Δ'. Quand Δ' se rapproche de Δ, p' tend vers p qui est bien, par suite, le point où (P) touche son enveloppe.

Le point p décrit donc la courbe (Γ); la tangente en ce point à (Γ) coïncidant avec celle de la conique (P) d'après le théorème fondamental des enveloppes, est donc la droite $p\Theta$ conjuguée harmonique de $\mathrm{P}p$ par rapport à $\mathrm{B}p$, $\mathrm{C}p$.

Si la tangente Δ passe en l'un des sommets A, B, C, on voit que le point p vient se confondre avec l'un de ces points. Nous en déduisons que la courbe (Γ) admet les trois points A, B, C comme points multiples d'ordre $c = m(m-1)$, c étant la classe de la courbe (C) en général. De plus, d'après la construction de la tangente en p à la courbe (Γ), on voit que les tangentes en B, C sont les $m(m-1)$ tangentes que l'on peut mener de ces points à (C) et qu'en A ces tangentes sont les conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC des tangentes menées de ce point à (C).

Il résulte aussi du mode de transformation que, dans le cas où la courbe (C) n'est pas tangente à BC, il n'y a pas de points de (Γ) en dehors de B, C sur la droite BC, qui rencontre, par suite, (Γ) en un nombre de points M égal à son degré, $2m(m-1) = M$. Plus généralement, c étant la classe de (C), le degré de (Γ) est $M = 2c$.

Remarque I. — Dans le cas particulier où (C) est tangente en t points à BC, le degré s'abaisse à $2(c-t)$.

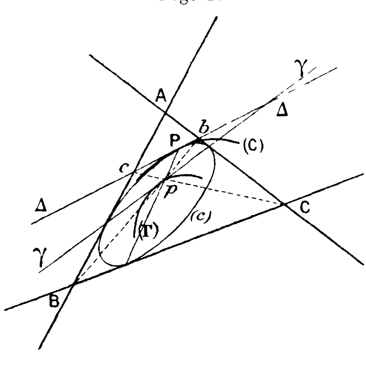
Remarque II. — Le degré de la courbe (Γ) peut se déduire aussi de cette remarque, que d'un point du plan on peut mener à la courbe (C) un nombre de tangentes égal à $c = m(m-1)$, en général. Par suite, la conique qui correspond à ce point rencontre la courbe (Γ) en $c = m(m-1)$ points en dehors des sommets qui comptent pour $3m(m-1)$, total en $4m(m-1)$ points et, d'après le théorème de Bezout, le degré de (Γ) sera

$$M = \frac{1}{2}[4m(m-1)] = 2m(m-1).$$

A une conique inscrite dans le triangle ABC *correspond une droite.*

En effet, soit Δ une tangente à cette conique (C) (*fig.* 2);

Fig. 2.



on sait que étant données deux coniques bitangentes à une troisième, les cordes des contacts et les sécantes communes concourent en un même point et forment un faisceau harmonique. Or ici les coniques (Δ, BC), (AB, CA) étant bitangentes à (C), les sécantes communes Cc, Bb se coupent en p situé sur la corde de contacts γ de (C) avec AC, AB. Cette droite γ est donc la transformée de (c).

Cette droite est une tangente commune à toutes les coniques (P), correspondant aux différents points P de (c), les points de contact correspondants étant, sur cette droite, les points p obtenus comme il a été dit plus haut.

Il résulte de là que, si l'on considère une tangente γ à la courbe (Γ) en p, la conique (c) dont cette droite est la transformée est inscrite dans le triangle et est tangente à la courbe (C) en P.

Des considérations précédentes nous déduisons les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *dont on connaît trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$ *est complètement déterminée quand on l'assujettit à être tangente à* $\frac{m(m+3)}{2}$ *coniques circonscrites au triangle* ABC *formé par les trois points multiples donnés.*

Il suffira, en effet, de construire les $\frac{m(m+3)}{2}$ points correspondants à ces coniques, qui déterminent la courbe (C) dont (Γ) est la transformée. On passe évidemment d'une conique (P) au point correspondant P en prenant le pôle de BC par rapport à cette conique.

THÉORÈME II. — *Une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *dont on connaît trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$ *est déterminée quand on en donne* $\frac{m(m+3)}{2}$ *points.*

C'est qu'en effet les $\frac{m(m+3)}{2}$ droites, dont ces points sont ceux qui y correspondent, déterminent une courbe (C).

Théorème III. — *Étant donnée une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *admettant trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$, *on peut par un point du plan mener m coniques tangentes à cette courbe et circonscrites au triangle formé par les trois points multiples.*

C'est la transformation de cette propriété : qu'une droite quelconque rencontre la courbe (C) dont (Γ) est la transformée, en m points.

Théorème IV. — *Étant donnés une courbe* (C) *de classe c et un quadrilatère, le nombre des coniques inscrites dans ce quadrilatère et tangentes à cette courbe est* $c(c+1)$.

Considérons le triangle ABC formé par trois des côtés du quadrilatère et la courbe (C); en appliquant notre méthode de transformation, nous avons à démontrer cette propriété : d'un point Q du plan on peut mener à la courbe (Γ) $c(c+1)$ tangentes.

Le point Q est le correspondant du quatrième côté du quadrilatère. Nous avons vu que le degré de (Γ) était $2c$; comme elle admet trois points d'ordre c qui comptent pour $\frac{3c(c-1)}{2}$ points doubles, sa classe C est par suite

$$C = 2c(2c-1) - 2\left[\frac{3c(c-1)}{2}\right] = c(c+1). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Application aux courbes du second degré. Quartiques unicursales et coniques.

En appliquant ces considérations générales au cas où la courbe (C) est une conique, nous voyons qu'à une conique correspond une quartique admettant les trois sommets du triangle ABC comme points doubles.

Les théorèmes énoncés précédemment donnent comme cas particuliers les suivants relatifs aux quartiques unicursales à points doubles réels.

1° *Une quartique dont on connaît trois points doubles est déterminée quand on l'assujettit à être tangente à cinq coniques circonscrites au triangle formé par les trois points doubles.*

2° *Une quartique dont on connaît trois points doubles est déterminée quand on en donne cinq points.*

3° *Une quartique unicursale à points doubles réels étant donnée, on peut, par un point du plan, mener deux coniques circonscrites au triangle formé par les points doubles et tangentes à cette quartique.*

Le dernier théorème IV donne lieu à une propriété relative aux coniques.

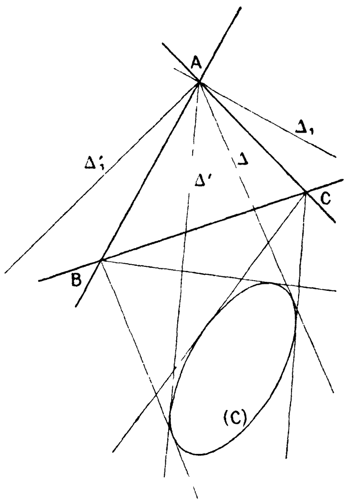
4° *Il existe six coniques inscrites dans un quadrilatère et tangentes à une conique donnée.*

Cette méthode de transformation conduit à des démonstrations géométriques simples des deux théorèmes connus :

Théorème. — *Les six tangentes aux trois points doubles d'une quartique unicursale sont tangentes à une même conique.*

Soit (*fig.* 3) une conique (C); les tangentes en A, B, C à la quartique unicursale (Γ) transformée de (C) sont, d'après ce qui a été dit plus haut, pour les points B, C les tangentes menées de ces points à (C) et pour A les deux droites Δ_1, Δ'_1 conjuguées harmoniques par rapport à AB, AC des deux tangentes Δ, Δ' menées de A à (C). Je dis que ces six droites sont tangentes à une même conique. Ceci résulte immédiatement du

Fig. 3.



théorème corrélatif de celui de Desargues. Les droites AC, AB; Δ, Δ' déterminent un faisceau involutif dont les rayons homologues sont les tangentes menées de A aux coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes menées de B, C à (C).

Or le rayon homologue de Δ_1, conjuguée harmonique de Δ par rapport à AB, AC, est évidemment Δ'_1, ce qui démontre la proposition.

Cette propriété montre que cinq des six tangentes aux trois points doubles d'une quartique étant données la sixième en résulte; elle donne un moyen simple de la construire.

THÉORÈME. — *Dans toute quartique admettant trois* *points de rebroussement les tangentes en ces points sont concourantes.*

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de considérer la quartique (Γ), transformée d'une conique (C) circonscrite au triangle ABC formé par les trois points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement de la quartique sont, en effet, les tangentes en B, C à (C) qui se coupent en P et la droite AP conjuguée harmonique par rapport à AB, AC de la tangente en A à (C).

Propriétés des quartiques unicursales déduites des coniques. — Notre méthode de transformation appliquée aux propriétés *projectives* des coniques nous permet d'énoncer immédiatement des propriétés relatives aux quartiques unicursales à points doubles réels.

Voici quelques-unes des transformations des propriétés les plus élémentaires des coniques; pour simplifier les énoncés de ces propriétés nous entendrons par quartiques (Γ) les quartiques circonscrites à un triangle ABC dont les sommets sont trois points doubles.

Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique.	On considère quatre coniques circonscrites à un triangle ABC et le réseau des quartiques (Γ) tangentes à ces quatre coniques. Si par un point donné on fait passer les deux couples de coniques circonscrites de ABC et tangentes à ces quartiques, pour chacune de ces quartiques il existe une conique (S) circonscrite au triangle et passant par les deux points de contact. L'enveloppe de ces coniques (S) est une quartique admettant A, B, C comme points doubles.

En effet, aux quatre points correspondent quatre coniques; à la droite Δ donnée correspond un point fixe Q; aux deux tangentes Θ_1, Θ'_1 à l'une des coniques (C_1) (circonscrite au quadrilatère donné), aux points où la droite Δ la rencontre, correspondent les deux points t_1, t'_1 de contact avec la quartique (Γ_1) du réseau des deux coniques passant par Q et circonscrites à ABC. Finalement, au pôle de Δ, par rapport à (C_1), correspond la conique (S) circonscrite au triangle et passant par les deux points t_1, t'_1.

L'enveloppe des polaires d'un point fixe, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère, est une conique.	On considère les quartiques (Γ) circonscrites à un quadrilatère fixe et une conique fixe circonscrite à ABC, qui rencontre chacune des quartiques (Γ) en deux points; les deux coniques circonscrites à ABC et tangentes en ces points aux quartiques se coupent en un quatrième point qui décrit une quartique admettant A, B, C comme points doubles.
Les polaires d'un point fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère passent par un point fixe.	On considère cinq coniques fixes circonscrites à ABC et le réseau des quartiques (Γ) tangentes à quatre de ces coniques; chacune de ces quartiques rencontre la cinquième conique en deux points; les deux coniques tangentes en ces points à la quartique et circonscrites au triangle se coupent en un quatrième point dont le lieu est une conique circonscrite à ABC.
Les pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques in-	On considère les quartiques (Γ) qui sont circonscrites

scrites dans un quadrilatère décrivent une droite.

à un quadrilatère donné. On mène d'un point fixe, à chacune de ces quartiques les deux coniques circonscrites à ABC et qui lui sont tangentes; les deux points de contact et les sommets A, B, C déterminent une conique. Toutes les coniques ainsi obtenues passent par un quatrième point fixe.

Le théorème de Pascal donne lieu au suivant :

On considère six points $p_1, p_2, \ldots, p_6$ *quelconques sur une quartique* (Γ) *donnée et les six coniques circonscrites à* ABC *et tangentes à* (Γ) *aux six points précédents. Ces coniques sont* $(P_1), (P_2), \ldots, (P_6)$; *les trois coniques circonscrites à* ABC *et passant par les quatrièmes points communs aux coniques*

$$[(P_1),(P_2)]\,[(P_4),(P_5)],\quad [(P_2),(P_3)]\,[(P_5),(P_6)],$$
$$[(P_3),(P_4)]\,[(P_6),(P_1)]$$

se coupent entre elles au même point.

Le théorème de Brianchon conduit au suivant :

On considère six points $p_1, p_2, \ldots, p_6$ *quelconques sur une quartique* (Γ); *les six coniques circonscrites à* ABC *et passant par les points* $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_6, p_1)$, *que nous désignerons par* $(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_6)$, *sont telles que les quatrièmes points communs aux coniques* $[(Q_1), (Q_4)], [(Q_2), (Q_5)], [(Q_3), (Q_6)]$ *sont sur une conique circonscrite à* ABC.

Ces quelques exemples montrent combien il est facile d'effectuer la transformation des propriétés des coniques. Il est inutile de faire remarquer que toutes les propriétés des quartiques unicursales à points doubles réels donnent par polaires réciproques des propriétés relatives aux quartiques ayant trois tangentes doubles.

I. *Les cordes des contacts avec deux des côtés d'un triangle* ABC *des coniques inscrites dans ce triangle et tangentes à une droite* Δ *fixe passent par un point fixe.*

C'est qu'en effet à l'une des coniques inscrites dans ABC correspondra la corde des contacts qui passera par le point correspondant dans la transformation à la droite Δ.

Si nous supposons que la droite Δ soit la droite de l'infini, le point correspondant est le point A' d'intersection des parallèles menées de B, C à AB, AC. Nous arrivons donc à cette conclusion : *les cordes des contacts des paraboles,* inscrites dans ABC, avec les côtés AB, AC, passent en A'. Les deux autres cordes des contacts passent par les points B', C'; par suite :

Les paraboles inscrites dans un triangle admettent toutes un triangle autopolaire commun (A', B', C') *et inversement.*

De sorte que les foyers des paraboles admettant un triangle autopolaire commun décrivent le cercle des neuf points de ce triangle et leurs directrices passent par le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

II. *Les cordes de contact avec deux des côtés d'un triangle des coniques inscrites dans ce triangle et passant par un point* P *enveloppent une conique* (P).

Cette conique est évidemment celle qui correspond dans la transformation au point P.

III. *On considère une conique* (P) *circonscrite à un* *triangle* ABC, *on joint un point* M *de la conique à deux sommets* B, C : *le point* M′ *de rencontre des droites* BM′, CM′ *conjuguées harmoniques de* BM, CM *par rapport aux médianes* B*b*, C*c et aux droites* BA′, CA′ (*b*, *c étant les milieux de* AC, AB, *et* A′ *défini comme précédemment*) *décrit une droite.*

Remarquons que cette propriété met en évidence une méthode de transformation qui ferait correspondre une droite à une conique circonscrite au triangle.

Cette proposition n'est que la transformée, par notre méthode, de la proposition suivante :

Étant donné un triangle, une droite se meut en restant parallèle à une direction donnée, l'enveloppe des transversales réciproques de chacune de ces droites par rapport au triangle est la parabole inscrite dans le triangle et dont la direction des diamètres est la direction donnée.

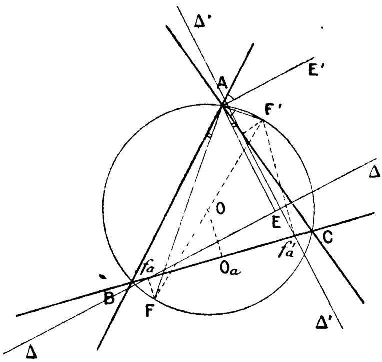
Pour la démontrer geométriquement nous nous appuierons sur la suivante :

Étant données dans un plan deux paraboles, il existe une hyperbole circonscrite au triangle formé par leurs trois tangentes communes et dont les asymptotes sont les tangentes à ces paraboles qui sont parallèles à leurs directions de diamètres.

Considérons, en effet, un triangle ABC, le cercle circonscrit et les paraboles (P), (P′) inscrites dans ABC de foyers F, F′ diamétralement opposés. Les droites de *Simson* de ces points sont Δ, Δ', deux transversales réciproques par rapport à ABC, puisque $Cfa = Bf'a$ (*fig.* 4) (fa, fa' sont les projections de F, F′ sur BC), Oa étant le milieu commun aux segments BC, fa, fa'.

Il existe donc une hyperbole circonscrite à ABC et dont les asymptotes sont Δ, Δ'. Ces droites sont rectangulaires car $\widehat{EAE'} = \widehat{FAF'} = \frac{\pi}{2} \left(\widehat{EAB} = \widehat{FAC'}, \widehat{E'AC'} = \widehat{F'AB}\right)$, et AE, AE′ donnent les directions des diamètres de (P),

Fig. 4.



(P′). Δ est donc bien parallèle à la direction des diamètres de (P′) et Δ′ parallèle à celles de (P).

Une projection *cylindrique* de cette figure établit la propriété énoncée précédemment.

Mais les asymptotes d'une conique sont, par rapport à un triangle inscrit, deux transversales réciproques ; donc à une tangente Δ à une parabole (P), inscrite dans ABC, correspond une seule parabole (P′) et, par suite, une seule tangente Δ′ parallèle à la direction des diamètres de (P) et qui se construira d'après la propriété précédente, en prenant la transversale réciproque de Δ.

Inversement, si une droite Δ′ se meut en restant parallèle à une direction fixe, les transversales réciproques de ces droites seront tangentes à la parabole (P) inscrite dans le triangle et dont la direction des diamètres est la direction donnée.

Remarque. — La propriété que nous venons de démontrer conduit, avec une légère remarque, à la *généralisation d'une des questions proposées au Concours d'admission à l'École Polytechnique en* 1889, qui s'énonce ainsi :

Étant données deux droites quelconques Δ, Δ', *on considère les paraboles tangentes à ces droites, dont les foyers décrivent deux droites* δ, δ' *parallèles aux précédentes et dont les directions des diamètres sont parallèles à* Δ, Δ', *les sommets des triangles circonscrits à ces paraboles sont sur l'hyperbole conjuguée de celle qui admet* Δ, Δ' *pour asymptotes et qui passe par le point d'intersection des droites* δ, δ'.

J'énoncerai enfin comme exercice la généralisation d'une question également proposée.

Les conditions précédentes étant remplies et la droite qui joint les foyers des paraboles restant de plus parallèle à une direction donnée, la somme algébrique des angles que font les trois tangentes communes avec une droite fixe est constante.