Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur le théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 437-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__437_1>

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Marseille.

Depuis que la notion d'intégrale définie fait partie du cours de Mathématiques spéciales, personne, que je sache, dans ce journal, n'a songé à s'en servir pour répondre à une question qui excite souvent la curiosité des bons élèves, sans qu'il soit possible de leur donner, en réponse, une de ces démonstrations qui s'imposent à l'esprit par la simplicité du calcul et la clarté de la méthode. Cette question, qui m'a été posée dans la classe préparatoire aux Mathématiques spéciales, est celle-ci : « *Pourquoi toute équation algébrique a-t-elle une racine?* » Si l'on veut traiter la question en étudiant la variation que subit l'argument du premier membre de l'équation, lorsque la variable imaginaire dont il dépend décrit un contour fermé, la difficulté consiste à faire voir que cette variation est toujours la même lorsque ce contour se déforme d'une manière continue, sans jamais passer par un point représentant une racine de l'équation donnée. C'est surtout cette difficulté que je veux résoudre à ma manière, renvoyant le lecteur, pour la fin de la démonstration, à l'*Algèbre* de Briot, annotée par M. Lacour (*voir* à la fin du Volume).

Soit $f(z)$ un polynome entier, à coefficients réels ou imaginaires. Remplaçons-y z par $x+y\sqrt{-1}$, et mettons le polynome sous la forme $X+Y\sqrt{-1}$, X et Y représentant deux polynomes entiers en x et y, à coefficients réels. Supposons que la variable z décrive un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon a, de telle sorte qu'à chaque position du point mobile représenté par cette variable réponde un arc t, ayant, avec x et y, les relations $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. L'argument du polynome dépend de a et de t, mais lorsque la variable z aura décrit la circonférence en entier, le sinus et le cosinus de cet argument, savoir

$$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{X}{\sqrt{X^2-Y^2}},$$

auront repris leurs valeurs initiales, et l'argument n'aura pu varier que d'un multiple de 2π. Je considère un autre cercle de rayon $a+\Delta a$, compris, comme le premier, dans une couronne circulaire ayant pour centre l'origine et ne comprenant aucun point racine de l'équation $f(z)=0$. Je dis que la variation de l'argument de ce polynome, relative à ce nouveau cercle, ne diffère pas de la variation relative au premier. En effet, soit $\omega(a, t)$ l'arc dont le cosinus et le sinus sont égaux, pour chaque valeur de t, à $\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ et à $\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$. La variation considérée le long du premier cercle est égale à

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(a,t)}{dt}\,dt,$$

et le long du deuxième cercle, à

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(a+\Delta a,t)}{dt}\,dt.$$

Entre ces deux variations, la différence est égale à

$$(1)\qquad \int_0^{2\pi} \left[\frac{d\omega(a+\Delta a,t)}{dt} - \frac{d\omega(a,t)}{dt}\right] dt,$$

et si sa valeur numérique est inférieure à 2π, elle est rigoureusement nulle. Mais, à chaque valeur de t, répond une longueur a', comprise entre a et $a+\Delta a$, et telle que la fonction sous le signe $\int$ peut être remplacée par

$$\Delta a\,\frac{\partial^2 \omega(a',t)}{\partial t\,\partial a'}.$$

En effet, ω étant un des arcs dont la tangente est $\dfrac{Y}{X}$, on trouve

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{XY'_t - YX'_t}{X^2+Y^2}.$$

En vertu de nos hypothèses, c'est là une fonction de a qui ne cesse pas d'être finie lorsque ce paramètre varie entre les rayons des deux cercles considérés; et il en est de même de sa dérivée par rapport à a, savoir

$$(2)\qquad \frac{(X^2+Y^2)\left(X\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t\,\partial a} - Y\dfrac{\partial^2 X}{\partial t\,\partial a}\right) - 2\left(X\dfrac{\partial X}{\partial a} + Y\dfrac{\partial X}{\partial a}\right)(XY'_t - YX'_t)}{(X^2+Y^2)^2}.$$

En outre, l'expression (2) montre que, dans toute l'étendue de la couronne, la fonction $\frac{\partial^2 \omega}{\partial a \partial t}$ reste inférieure à un nombre constant M, et par conséquent l'intégrale (1) est numériquement inférieure à

$$\Delta a \times M \times 2\pi.$$

Si donc Δa est inférieur ou égal à $\frac{1}{M}$, le théorème est démontré. Dans le cas contraire, traçons p cercles, par exemple, concentriques aux premiers, et dont les rayons soient $a + \frac{1}{M}$, $a + \frac{2}{M}$, ..., $a + \frac{p}{M}$ avec la condition $\Delta a - \frac{p}{M} \leqq \frac{1}{M}$.

Soient V_0 et V les valeurs de l'intégrale (1) relatives aux deux cercles donnés, V_1, V_2, V_3, ..., V_p les valeurs relatives aux cercles intermédiaires. De l'identité

$$V - V_0 = (V - V_p) + (V_p - V_{p-1}) + \ldots + (V_1 - V_0)$$

on déduit $V - V_0 = 0$, puisque chacune des différences écrites au second membre est nulle. Le théorème est donc démontré.

Il reste à faire voir que la variation, relative à un cercle ayant pour centre l'origine, est nulle, si le rayon de ce cercle est plus petit que le module de toute racine de l'équation $f(z) = 0$. Or, si l'on fait $x = 0$ et $y = 0$, l'un au moins des polynomes X, Y, par exemple X, prend une valeur A différente de zéro. Soit

$$X = A + ax + by + cx^2 + dxy + cy^2 + \ldots,$$

et soient aussi K le nombre des termes ax, by, cx^2, ..., M un nombre supérieur au module de tout coefficient a, b, c, ... On peut trouver un nombre α, tel que, si les valeurs numériques de x et de y ne dépassent pas α, chacun des termes variables du second membre de l'égalité précédente ne dépasse pas $M\alpha$ (numériquement), et, si l'on suppose $\alpha < \frac{|A|}{KM}$, on est assuré que si la variable z décrit un cercle ayant l'origine pour centre et dont le rayon est égal ou inférieur à α, le polynome X ne s'annule jamais. Dès lors, l'argument du polynome $f(z)$ ne peut varier qu'entre deux multiples consécutifs impairs de $\frac{\pi}{2}$, puisque son cosinus ne change pas de signe; donc sa variation totale, étant moindre que π, est rigoureusement nulle.

Si le polynome X était nul à l'origine, on ferait appel au polynome Y et l'on montrerait que l'argument du polynome varie entre deux multiples consécutifs de π.

Enfin, si le rayon du cercle donné est supérieur à α, on lui appliquera le théorème précédent, en le renfermant dans une couronne limitée d'une part par le cercle de rayon α, et d'autre part, par un autre cercle de rayon supérieur au rayon du cercle donné, mais inférieur au module de toute racine de l'équation $f(z) = 0$.

Pour conclure, nous démontrerons qu'il est possible de trouver une longueur R assez grande pour que, la variable z décrivant un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre, l'argument du polynome varie d'une quantité différente de zéro, de telle sorte que ce cercle renferme au moins un point racine de l'équation obtenue en égalant ce polynome à zéro.

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

le polynome donné. Posant $z = \frac{1}{z'}$, nous trouvons

$$f(z) = \frac{a_0 z'^m + a_1 z'^{m-1} + \ldots + a_m}{z'^m}$$

et, si la variable z décrit un cercle ayant l'origine pour centre et R pour rayon, z' décrira, en sens inverse, un cercle ayant l'origine pour centre et pour rayon $\frac{1}{R}$. Mais, si $\frac{1}{R}$ est inférieur au module de toute racine de l'équation

$$a_0 z'^m + a_1 z'^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

la variation de l'argument du quotient écrit ci-dessus se réduira à la variation, changée de signe, de l'argument du diviseur, savoir $2m\pi$.

Il est inutile de montrer ici comment l'expression de cette variation dénote la présence de m racines, puisque la démonstration en a été donnée par les auteurs cités au début de cet Article.