Nouvelles annales de mathématiques

Romuald Blazeievski

Sur un problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 442-446
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__442_1>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

Les inconnues $y_\iota = \frac{1 - x_\iota}{D}$ satisfont à l'équation

$$(1) \quad s^3 - \frac{1}{D} s^2 + \frac{C(kD^2 - 1)}{D''} s - \frac{C}{D^5}(kD^2 - lD^3 - 1) = 0.$$

Rappelons-nous l'équation

$$hD - z = \frac{y - 1}{z - q} z - \frac{y^2 z}{q(y - 1)}.$$

Cette équation peut être représentée sous une autre forme à l'aide des relations

$$z = \frac{1}{D\sqrt{k}} - \frac{1}{k D^3 \sqrt{k}}, \qquad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}}, \qquad y - 1 = C\left(k - \frac{1}{D^2}\right);$$

nous avons

$$(2)\quad h\mathrm{D} - 5 = \frac{\mathrm{C}(k\mathrm{D}^2 - 1)^2}{\mathrm{D}^2(k\mathrm{D}^2 - 1 - l\mathrm{D}^3)} - \frac{[\mathrm{D}^2 + \mathrm{C}(k\mathrm{D}^2 - 1)]^2}{l\mathrm{C}\mathrm{D}^5}.$$

Les y_i ont une expression algébrique

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{t_1}{u_1}, \qquad y_2 = \frac{1}{2}\frac{f_2}{u_2}, \qquad y_3 = \frac{1}{2}\frac{t_3}{u_3},$$

$$t_1 = \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, \qquad t_2 = \sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}, \qquad t_3 = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta},$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}, \qquad \ldots.$$

Ainsi, si l'on désigne $\mathrm{A} = u_1 u_2 u_3$, $\mathrm{B} = \Sigma\, u_1 u_2 t_3$, $\mathrm{G} = \Sigma\, u_1 t_2 t_3$, $\mathrm{D}' = t_1 t_2 t_3$, on a

$$8\,\mathrm{A}s^3 - 4\,\mathrm{B}s^2 + 2\,\mathrm{G}s - \mathrm{D}' = 0,$$

Appelons

$$\mathrm{U} = \Sigma\, m_1 (m_2 - m_3)\sqrt{\alpha},$$
$$\mathrm{V} = \Sigma (m_2 - m_3)\sqrt{\alpha},$$
$$\mathrm{W} = \Sigma\, \frac{m_2 - m_3}{m_1}\sqrt{\alpha},$$

on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{A} = \dfrac{1}{l}(\mathrm{W} - \mathrm{D}\mathrm{V}), & \mathrm{B} = -\dfrac{1}{l}(\mathrm{D}\mathrm{U} + \mathrm{V}), \\ \mathrm{G} = \left(\mathrm{D} - \dfrac{k}{l}\right)\mathrm{W} - \dfrac{2}{l}\,\mathrm{U}, & \mathrm{D}' = \left(\mathrm{D} - \dfrac{k}{l}\right)\mathrm{V}. \end{array}\right.$$

En effet, les termes tels que $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ disparaissent dans A, B, G, D'. Prenons par exemple G, nous avons de $u_1 t_2 t_3$ le terme $\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta\gamma\alpha}$, mais $t_1 t_2 u_3$ donne ce même terme $-\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta\gamma\alpha}$ avec le signe opposé; cherchons le facteur qui multiplie $\sqrt{\alpha}$, dans $u_1 t_2 t_3$; on a $u_1(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})\sqrt{\alpha}$; le seul terme dépendant de $\sqrt{\alpha}$, dans $t_1 u_2 t_3$; on trouve $t_1\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_1}\right)\sqrt{\alpha}$; enfin $t_1\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_1} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}\right)\sqrt{\alpha}$

dans $t_1 t_2 u_3$. Ainsi

$$G = \left[u_1(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) + t_1\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{m_1}\right)\right]\sqrt{\alpha} + \ldots,$$

ou bien faisant la multiplication et substituant $m_1(D-a)$, $m_2(D-b)$, $m_3(D-c)$ aux symboles α, β, γ

$$\begin{aligned} G &= 2c - 2b + \frac{m_2(D-b) - m_3(D-c)}{m_1} \\ &= 2\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\right) + \frac{m_2 - m_3}{m_1} D - \frac{m_2 - m_3}{m_1^2} - \frac{1}{m_1}\left(\frac{m_2}{m_3} - \frac{m_3}{m_2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (m_2 - m_3)\left(\frac{D}{m_1} - \frac{k}{l m_1} - \frac{2}{m_2 m_3}\right)\sqrt{\alpha} \\ &= \left(D - \frac{k}{l}\right)\Sigma\,\frac{m_2 - m_3}{m_1}\sqrt{\alpha} - \frac{2}{l}\,\Sigma\, m_1(m_2 - m_3)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Une grande simplicité dans les formules apparaît si l'on pose $lD^3 = (kD^2 - 1)x$; on a

$$C = \frac{(lD-k)D^4}{4(kD^2-1) - 8lD^3} = \frac{(lD-k)D^4}{4(kD^2-1)(1-2x)},$$

$$\frac{4C(kD^2-1)}{D^4} = \frac{lD-k}{1-2x},$$

$$\frac{8C(kD^2-1-lD^3)}{D^5} = \frac{2(lD-k)(1-x)}{D(1-2x)}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$(1') \quad s^3 - \frac{1}{D}s^2 + 4\,\frac{lD-k}{1-2x}\,s - \frac{2(lD-k)(1-x)}{D(1-2x)} = 0,$$

$$(2') \quad hD - 5 = -\frac{1}{4}\,\frac{D^2(lD-k)}{x(1-x)} - \frac{2}{x} - \frac{4(1-2x)}{x(lD-k)D^2}.$$

D'après (3) nous avons

$$(3') \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{lD}(W - DV) = -\frac{1}{l}(DU + V), \\ &\frac{(lD-k)(W-DV)}{l(1-2x)} = \frac{(lD-k)W - 2U}{l}, \\ &\frac{2(lD-k)(1-x)}{lD(1-2x)}(W - DV) = \frac{(lD-k)V}{l}. \end{aligned} \right.$$

Séparant la solution $lD - k = 0$ qui exige des valeurs spéciales pour les données du problème, nous aurons

$$(4')\quad \begin{cases} D^2U - DV + 2W = 0, \\ (lD - k)DV - 2x(lD - k)W - 2(1 - 2x)U = 0, \\ (3 - 4x)DV = 2(1 - x)W. \end{cases}$$

Mais les rapports égaux donnent

$$\frac{DV}{2(1-x)} = \frac{W}{3-4x} = \frac{DV - 2W}{2(3x-2)} = \frac{D^2U}{2(3x-2)}.$$

Ainsi, comme les équations (4) sont homogènes, on leur satisfera, substituant aux U, V, W les valeurs proportionnelles

$$D^2(lD - k)\left[3 - 4x - \frac{3 - 4x - 2(1-x)}{(1-2x)}\right] = 4(3x - 2)$$

ou bien

$$(5)\qquad D^2(lD - k)(1 - 2x) - 2(3x - 2) = 0,$$

par la transformation à l'aide de $lD^3 = (kD^2 - 1)x$,

$$(1 - 2x)[(kD^2 - 1)x - kD^2] - 2(3x - 2) = 0,$$

$$(x - 1)(2x - 1)kD^2 = 2x^2 - 7x + 4,$$

$$(6)\qquad kD^2 = \frac{2x^2 - 7x + 4}{(x-1)(2x-1)},$$

$$(5')\quad \begin{cases} (lD - k)(1 - 2x)\dfrac{2x^2 - 7x + 4}{(x-1)(2x-1)} = 2k(3x - 2), \\ (lD - k)(2x^2 - 7x + 4) = 2k(2 - 3x); \end{cases}$$

enfin, séparant le terme en D,

$$(7)\qquad (2x^2 - 7x + 4)lD = 4x(3 - 4x)k.$$

Nous ne pousserons pas plus loin l'élimination de l'inconnue D. Évidemment, les équations contenant k et l ne satisfont pas à la question générale, car k, l peuvent varier séparément de h. L'équation finale sera, au plus, du degré six en x.

Éliminant $k\mathrm{D}^2$ et D au moyen de (6), (7), nous aurons

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{hk}{l(2x^2-7x+4)} - 5 \\ &\quad = \frac{3x-2}{2x(1-x)(2x-1)} - \frac{2}{x} + \frac{2(2x-1)^2}{x(2-3x)}. \end{aligned} \right.$$

En effet, un calcul un peu laborieux, mais facile, donne cette formule. En chassant les dénominateurs, on a successivement

$$\frac{hk}{l(2x^2-7x+4)} = \frac{(3x-2)2(2-3x)-(2+5x)2(1-x)(2x-1)(2-3x)+2^2(1-x)(2x-1)^3}{2x(1-x)(2-x)(2x-1)(2-3x)},$$

l'équation sera au plus du degré six.

Ainsi, en adjoignant les solutions singulières, résultant des équations (6) et (7),

$$l^2(2x^2-7x-4)^3 = k^3x^2(4x-3)^2(x-1)(2x-1)$$

et la solution

$$l\mathrm{D}-k=0,$$

nous avons la certitude que, procédant d'une manière ordinaire à la recherche de l'équation en D, nous aurions une équation du douzième degré.