E. AMIGUES

# Démonstration algébrique d'un théorème relatif à l'intersection de deux courbes

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 14 (1895), p. 447-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__447_1>

# DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE D'UN THÉORÈME RELATIF A L'INTERSECTION DE DEUX COURBES;

PAR M. E. AMIGUES.

---

*Si un même point est d'ordre p dans une courbe d'ordre m et d'ordre q dans une autre courbe d'ordre n, ces deux courbes se coupent au plus en* $(mn - pq)$ *autres points.*

Prenons ce point pour origine. Les équations des deux courbes sont

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_p(x,y) = 0,$$
$$\psi_n(x,y) + \psi_{n-1}(x,y) + \ldots + \psi_q(x,y) = 0.$$

Posons

$$y = tx.$$

A chaque solution $(x, y)$ correspond une solution $(x, t)$, et à chaque solution $(x, t)$ correspond une solution $(x, y)$.

Étudions donc les solutions $(x, t)$, qui sont données par les équations

$$x^m \varphi_m(1, t) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) + \ldots + x^p \varphi_p(1, t) = 0,$$
$$x^n \psi_n(1, t) + x^{n-1} \psi_{n-1}(1, t) + \ldots + x^q \psi_q(1, t) = 0.$$

Supprimons les solutions composées d'un $x$ nul et d'un $t$ arbitraire, qui donneraient un $y$ nul et par suite l'origine. Les équations deviennent

$$x^{m-p}\varphi_m(1,t)+x^{m-p-1}\varphi_{m-1}(1,t)+\ldots+\varphi_p(1,t)=0,$$
$$x^{n-q}\psi_n(1,t)+x^{n-q-1}\psi_{n-1}(1,t)+\ldots+\psi_q(1,t)=0.$$

Il n'y a plus qu'à compter les solutions de ce système.

Pour cela nous allons éliminer $x$ et prouver que l'équation en $t$ est au plus de degré $mn-pq$.

Représentons les équations comme il suit :

$$a_0x^{m-p}+a_1x^{m-p-1}+\ldots+a_ix^{m-p-i}+\ldots+a_{m-p}\equiv 0,$$
$$b_0x^{n-q}+b_1x^{n-q-1}+\ldots+b_jx^{n-q-j}+\ldots+b_{n-q}\equiv 0.$$

Le résultant est de la forme

$$\Sigma M a_i^\lambda a_j^\mu b_k^\nu b_l^\rho$$

avec la condition

$$\lambda i+\mu j+\nu k+\rho l=(m-p)(n-q),$$

$a_i$ est un polynome en $t$ qui est au plus de degré $m-i$ et $a_i^\lambda$ est au plus de degré $\lambda(m-i)$. De même $b_k^\nu$ est au plus de degré $\nu(n-k)$.

Donc le résultant est un polynome en $t$ de degré au plus égal à

$$\lambda(m-i)+\mu(m-j)+\nu(n-k)+\rho(n-l),$$

c'est-à-dire à

$$m(\lambda+\mu)+n(\nu+\rho)-(m-p)(n-q);$$

mais on a aussi, par les propriétés du résultant,

$$\lambda+\mu\leqq n-q,$$
$$\nu+\rho\leqq m-p.$$

Donc le degré du résultant est au plus

$$m(n-q)+n(m-p)-(m-p)(n-q),$$

c'est-à-dire

$$mn-pq.$$