E.-N. Barisien

Sur les podaires successives d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 463-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__463_0>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE (1);

Par M. E.-N. BARISIEN.

Les formules démontrées à l'Article précité permettent de résoudre très simplement la question suivante, qu'il ne serait pas aisé de trouver directement :

Aire de la podaire de la seconde développée de la $m^{ième}$ podaire d'une courbe. — En conservant les notations de l'Article précédent, soit toujours

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe fondamentale.

Si γ est le centre de courbure relatif à M, on a $M\gamma = R_0$. Menons par γ une parallèle à la tangente MP_1 et abaissons sur cette parallèle une perpendiculaire issue de O qui la rencontre en I. La droite $I\gamma$ étant normale à la développée de la courbe fondamentale, il est bien évident que le point I appartient à la podaire de la seconde développée de cette courbe relativement à O.

Soient donc ρ et ω les coordonnées polaires du point I. On a

$$OI = \rho = R_0 - r_1 = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} - \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$360^\circ - \omega = 180^\circ - \theta_1 :$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\theta_1}{d\theta}.$$

(1) Note complémentaire à l'article de même titre paru en mars 1395, p. 89.

La différentielle $d\Sigma$ de l'aire de la courbe en question est donc

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta_1}{d\theta}.$$

Or, on a trouvé

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{(r'^4 + r^3 r'')^2}{(r^2 + r'^2)^2(r^2 + 2r'^2 - rr'')}.$$

Cette fonction sera intégrable lorsque r sera une fonction rationnelle, soit de θ, soit des lignes trigonométriques de θ. Il en sera ainsi lorsque la courbe fondamentale sera une courbe unicursale.

La formule (1) sera plus facile à calculer en l'écrivant sous la forme

$$(2) \qquad \frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{\frac{1}{r^2 + r'^2}\left[(r^2 + r'^2) - r^2\left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right]^2}{2\left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)},$$

car on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'}, \qquad \frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Soit maintenant I_1 le point analogue à I, situé sur la podaire de la seconde développée de la première podaire. Si ρ_1 et ω_1 sont les coordonnées de I_1, on a

$$\rho_1 = R_1 - r_2,$$
$$360^\circ - \omega_1 = 180^\circ - \theta_2,$$

et de même pour le point I_m de coordonnées ρ_m et ω_m, situé sur la podaire de la seconde développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire,

$$\rho_m = R_m - r_{m+1},$$
$$360^\circ - \omega_m = 180^\circ - \theta_{m+1}.$$

D'après les relations (5), (6) et (11) de l'Article précité, et remarquant que

$$\frac{d\omega_m}{d\theta} = \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta}$$

on a, pour la différentielle de l'aire de cette courbe (ρ_m, ω_m),

$$\frac{d\Sigma_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_m^2 \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta} = \frac{1}{2}(\mathrm{R}_m - r_{m+1})^2 \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta},$$

c'est-à-dire, toutes réductions faites,

$$(3)\quad \frac{d\Sigma_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{r^{2m}}{(r^2+r'^2)^{m+2}}\,\frac{[r'^4+r^3r''+mr'^2(r'^2-rr'')]^2}{[r^2+r'^2+(m+1)(r'^2-rr'')]}.$$

Pour $m = 0$, on retombe bien sur la formule (1). D'ailleurs, cette formule est tout à fait générale, car en changeant m en $-m$, on a :

Aire de la podaire de la seconde développée de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire.

$$\frac{d\Sigma_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{(r^2+r'^2)^{m-2}}{r^{2m}}\,\frac{[r'^4+r^3r''-mr'^2(r'^2-rr'')]^2}{[r^2+r'^2-(m-1)(r'^2-rr'')]}.$$

APPLICATIONS.

I. La courbe fondamentale est la cardioïde : le point O est au point de rebroussement de la cardioïde.

L'équation polaire de la cardioïde étant

$$r = a(1+\cos\theta),$$

on trouve

$$r^2+r'^2 = 2a^2(1+\cos\theta), \qquad \frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2} = \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$d\Sigma = \frac{a^2}{3}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2$$

ou, en posant $\theta = 2\varphi$, on a, pour l'aire totale Σ,

$$\Sigma = \frac{4a^2}{3}\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi + 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\, d\varphi\right).$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Donc

$$\Sigma = \frac{5\pi a^2}{24}.$$

II. La courbe fondamentale est l'ellipse : le point O est en son centre.

L'équation polaire de l'ellipse est

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

Or en déduit

$$\frac{r}{r'} = -\frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}{c^2\sin\theta\cos\theta},$$

$$r^2 + r'^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3},$$

$$\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = -\frac{c^2(a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta},$$

$$1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{a^2 b^2}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}.$$

Par conséquent

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{(a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta)}{2}$$
$$\times\left[\frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2} - \frac{a^2 b^2}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}\right]^2.$$

En tenant compte de l'identité

$$a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta = (a^2+b^2)(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) - a^2b^2,$$

on obtient, pour l'aire totale Σ,

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{2} = (a^4+b^4)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \\ -2a^2b^2(a^2+b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2} \\ +a^4b^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3} \\ +a^4b^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,d\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}.\end{aligned}$$

En posant $\tang\theta = t$, on obtient, par la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, la valeur des intégrales du second membre de Σ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2ab},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{4a^3b^3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3} = \frac{\pi}{16a^5b^5}(3a^4+3b^4+2a^2b^2),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,d\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{4a^4b^4}.$$

On trouve alors, toutes réductions faites, pour l'aire Σ

$$\Sigma = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a'+b')}{2} - \pi ab$$

ou

$$\Sigma = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a-l)^2}{2}.$$

D'où il résulte la relation remarquable suivante :

L'aire de la podaire du centre de la seconde développée de l'ellipse est équivalente à la somme des aires de la première développée et de la podaire du centre de cette première développée (1).

III. La courbe fondamentale est la développante de cercle dont les coordonnées sont en fonction de l'angle de déroulement φ

$$x = \mathrm{R}(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$
$$y = \mathrm{R}(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi).$$

Le point O est au centre du cercle.

Il est bien évident que, dans le cas actuel, l'aire Σ est nulle.

Proposons-nous de calculer l'aire Σ_1, c'est-à-dire l'*aire de la podaire de la seconde développée de la première podaire de la développante du cercle.*

Nous n'avons pas l'équation de la développante en coordonnées polaires, sous une forme commode. On peut néanmoins appliquer les formules générales. En effet, on a

$$(4) \qquad r^2 = \mathrm{R}^2(1 + \varphi^2).$$

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}.$$

En différentiant l'équation (5), on trouve

$$(6) \qquad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}.$$

(1) Ce théorème est un cas particulier d'une propriété que je crois plus générale et que j'ai posée sous le n° 225 dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. I, page 117.

La différentiation de (4) donne

$$r\,dr = R^2 \varphi\, d\varphi$$

ou

$$rr' = R^2 \varphi \frac{d\varphi}{d\theta},$$

et d'après (6)

$$rr' = \frac{R^2(1+\varphi^2)}{\varphi}.$$

Donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = \varphi,$$

$$V = \operatorname{arc\,tang} \varphi$$

et

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{1}{1+\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

On a encore

$$r^2 + r'^2 = \frac{R^2(1+\varphi^2)^2}{\varphi}, \qquad \frac{r^2}{r^2+r'^2} = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}.$$

La différentielle de l'aire Σ_1 est

$$\frac{d\Sigma_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{(r^2+r'^2)}\frac{[r'^4 + r^3 r'' + r'^2(r'^2 - rr'')]^2}{[r^2 + r'^2 + 2(r'^2 - rr'')]}.$$

Au moyen de l'identité

$$r'^4 + r^3 r'' = (r^2 + r'^2)^2 - r^2[(r^2 + r'^2) + r^2 - rr'')],$$

on obtient facilement

$$\frac{d\Sigma_1}{d\varphi} = \frac{d\varepsilon_1}{d\theta}\frac{d\theta}{d\varphi},$$

$$d\Sigma_1 = \frac{R^2\, d\varphi}{2(\varphi^2+1)^2(\varphi^2+2)},$$

$$\frac{d\Sigma_1}{d\varphi} = \frac{R^2}{2}\left\{\frac{1}{(\varphi^2+1)^2} - \frac{1}{\varphi^2+1} + \frac{1}{\varphi^2+2}\right\}.$$

Si φ varie de o à l'∞, on obtient pour l'aire totale Σ_1

l'expression

$$\Sigma_1 = \frac{\pi R^2}{8}(\sqrt{2}-1).$$

IV. La courbe fondamentale est la spirale logarithmique

$$r = ae^{n\theta};$$

le point O est au pôle de la spirale.

On sait que les podaires successives d'une spirale logarithmique, par rapport à son pôle, sont des spirales logarithmiques : les développées successives sont aussi des spirales logarithmiques. Il en résulte que les courbes Σ, Σ_1, ..., Σ_m sont également des spirales logarithmiques.

On a

$$r' = nae^{n\theta}, \qquad r'' = n^2 ae^{n\theta}, \qquad r'^2 - rr'' = 0,$$

$$r^2 + r'^2 = (1+n^2)\, a^2 e^{2n\theta},$$

de sorte que

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{n^4}{2(1+n^2)} a^2 e^{2n\theta}$$

et, en intégrant entre les limites $\theta = -\infty$ et $\theta = 0$, on trouve une aire finie

$$\Big[\Sigma\Big]_{\theta=-\infty}^{\theta=0} = \frac{a^2 n^3}{4(1+n^2)}.$$

On obtient facilement l'équation de la courbe Σ, en remarquant que

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{n}, \qquad R_0 = a\sqrt{1+n^2}\, e^{n\theta}, \qquad r_1 = \frac{r}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Or,

$$\rho = R_0 - r_1 = a\sqrt{1+n^2}\, e^{n\theta} - \frac{r}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$\rho = \frac{an^2 e^{n\theta}}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$180^\circ + \theta = \omega,$$

de sorte que l'équation polaire de la courbe Σ est

$$\rho = \frac{a n^2}{\sqrt{1 + n^2}} e^{n(\omega - \pi)}.$$

C'est bien une spirale logarithmique.

V. La courbe fondamentale est la spirale d'Archimède

$$r = a\theta;$$

le point O est au pôle de la spirale.

On trouve alors pour la différentielle de l'aire Σ

$$d\Sigma = \frac{a^2 d\theta}{2(\theta^2 + 2)(\theta^2 + 1)^2}.$$

C'est la même expression que celle de $d\Sigma_1$ dans l'exemple (III), relatif à la développante de cercle. On a donc, en intégrant de o à l'∞,

$$\Sigma = \frac{\pi a^2}{8}(\sqrt{2} - 1).$$

Cette identité de l'aire Σ actuelle et de l'aire Σ_1 de l'exemple III provient de ce que *la podaire de la développante de cercle par rapport au centre du cercle est une spirale d'Archimède*.