Nouvelles annales de mathématiques

E. Amigues

Sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 491-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__491_1>

SUR LES SURFACES GAUCHES DONT UNE MÊME COURBE PLANE EST A LA FOIS LIGNE DE STRICTION ET LIGNE DE COURBURE;

PAR M. E. AMIGUES.

M. Antomari s'est demandé incidemment quelles sont les surfaces gauches où une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure. (Thèses soutenues devant la Faculté de Paris, 1894.)

Il donne une propriété générale de ces surfaces, mais il ne donne leurs équations que dans quelques cas simples. Ces équations, dans le cas général, se déduisent aisément de formules que j'ai données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1889. C'est ce que je me propose d'établir dans cette Note.

Soit une courbe plane quelconque, dont le plan sera pris pour plan des xy. Soit s la longueur d'un axe de cette courbe comptée depuis un point fixe A jusqu'au point variable m dont les coordonnées sont (x, y). ω étant une fonction arbitraire de s, une pareille courbe est représentée par les équations

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int \cos\omega\, ds,\\ y &= \int \sin\omega\, ds,\\ z &= 0.\end{aligned}\right.$$

Considérons une surface réglée passant par cette courbe, et soient λ, μ, ν les paramètres directeurs de la génératrice, qui passe en m, paramètres qui sont des fonctions de s.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point P pris sur cette génératrice, de telle sorte que le segment MP soit représenté par u.

La surface réglée est représentée par les équations

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= x + \lambda u,\\ \mathrm{Y} &= y + \mu u,\\ \mathrm{Z} &= z + \nu u,\end{aligned}\right.$$

où les variables sont u et s.

J'ai montré, dans les *Nouvelles Annales*, que, si α représente l'angle de la courbe plane avec la génératrice (angle qui est une fonction arbitraire de s, la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe plane soit ligne de striction est

$$(1) \qquad -\lambda \sin\omega + \mu \cos\omega = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{d\omega}$$

et, comme on a évidemment

$$(2) \qquad \lambda \cos\omega + \mu \sin\omega = \cos\alpha,$$

$$(3) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

les paramètres λ, μ, ν se trouvent calculés en fonction de α et ω qui sont deux fonctions arbitraires de s.

Ainsi les équations (B), dans lesquelles x, y, z sont remplacées par leurs valeurs (A) et λ, μ, ν par les valeurs calculées, représentent toutes les surfaces gauches qui ont une ligne plane pour ligne de striction.

Les équations de cette surface contiennent deux fonctions arbitraires de s, savoir ω et α.

Si donc on impose à ces surfaces une autre condition, on trouve une relation entre ω et α, et la solution ne contient plus qu'une seule fonction arbitraire.

En prenant pour seconde condition celle de M. Antomari, on trouve une relation linéaire entre α et ω.

En effet, il est facile de voir que le plan tangent à la surface au point m a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \cos\omega & \sin\omega & 0 \end{vmatrix}.$$

L'angle V qu'il fait avec le plan des x, y doit être constant. On a donc

$$\cos V = \frac{\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega}{\pm\sqrt{\nu^2 + (\lambda \sin\omega - \mu\cos\omega)^2}}.$$

Or on a trouvé ci-dessus

$$\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega = \sin\alpha \frac{d\alpha}{d\omega},$$

et l'on voit facilement que

$$\lambda^2 + \mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2;$$

d'où

$$V^2 = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2.$$

On a alors

$$\pm\cos V = \frac{d\alpha}{d\omega};$$

d'où

$$\alpha = \pm\,\omega\cos V + \alpha_0.$$

Il n'y a donc qu'à remplacer α par cette valeur dans les formules publiées par les *Nouvelles Annales* et qui sont les suivantes :

$$X = \int \cos\omega\, ds + \left(\cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)u,$$

$$Y = \int \sin\omega\, ds + \left(\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)u,$$

$$Z = u\sin\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2}.$$