NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SONDAT

Sur quelques propriétés des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 507-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__507_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

[Suite ([1])];

PAR M. P. SONDAT.

19. Conique rapportée au triangle de deux de ses tangentes et de la corde des contacts.

Toute conique est représentée par l'équation générale

$$(27)\qquad (P\beta^2+Q\beta+R)\alpha^2+(S\beta+T)\alpha+u=0.$$

Elle coupe les côtés BC, CA, AB aux points λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1, racines des équations

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &R\lambda^2+T\lambda+U=0,\\ &P\mu^2+Q\mu+R=0,\\ &U\nu^2-\ S\nu+P=0.\end{aligned}\right.$$

Elle sera donc tangente en A à AC et en B à BC, si l'on a

$$P=0,\qquad Q=0,\qquad T=0,\qquad U=0.$$

Si donc m désigne le rapport $S:R$, ses équations seront

$$(29)\qquad \alpha+m\beta=0,\qquad \alpha^2\gamma-m=0,\qquad m\beta^2\gamma-1=0,$$

et, en coordonnées tangentielles,

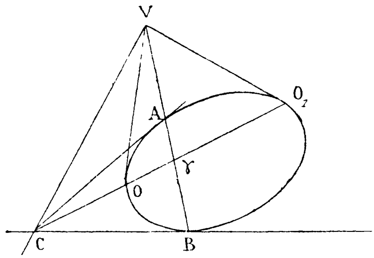
$$(30)\qquad m\mu+4\lambda=0,\qquad 4\lambda^2\nu+m=0,\qquad m\mu^2\nu+4=0.$$

On voit aisément, par ces équations, que toute sécante COO_1 (*fig.* 5), menée par C, coupe la conique en deux points conjugués sur $C\gamma$ et que deux tangentes issues

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 369.

d'un point ν de AB, forment avec νA et νC un faisceau harmonique.

Fig. 5.



La courbe est d'ailleurs une parabole si $m = -4$.

20. Théorème. — *Si le point* ω (xyz) *décrit une droite* X$(\lambda\mu\nu)$, *et si l'on mène les droites* $\alpha\mu z$, $x\beta\nu$, $\lambda y\gamma$ *et* $\alpha_1 y\nu$, $\lambda\beta_1 z$, $x\mu\gamma_1$, *les deux points* O$(\alpha\beta\gamma)$ *et* O$_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *appartiendront à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon* X, *et la corde* OO$_1$, *polaire de* ω, *envelop-pera la conique* Q$_1$ *inscrite selon le pôle* $(-\lambda, -\mu, -\nu)$ *de* X.

On a (1)

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{y}{\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{y} + \frac{z}{\nu} = 1, \qquad \frac{\nu}{z} + \frac{x}{\lambda} = 1,$$

et comme

$$\begin{cases} \alpha\mu z = x\beta\nu = \lambda y\gamma = 1, \\ \alpha_1 y\nu = \lambda\beta_1 z = x\mu\gamma_1 = 1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant

$$\frac{\beta}{\mu} + \frac{\nu}{\lambda} = 1, \qquad \frac{\gamma_1}{\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_1} = 1,$$

ou (1), O et O$_1$ appartiennent à Q.

Soit X$_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ la corde OO$_1$.

On a

$$\lambda_1 = \frac{\nu x - \lambda z}{\nu z(\mu x - \lambda y)},$$
$$\mu_1 = \frac{\lambda y - \mu x}{\lambda x(\nu y - \mu z)},$$
$$\nu_1 = \frac{\mu z - \nu y}{\mu y(\lambda z - \nu x)},$$

ou, en utilisant les équations de X,

$$\lambda_1 + x = 0, \qquad \mu_1 + y = 0, \qquad \nu_1 + z = 0.$$

Donc X_1 est la polaire de ω (tri. ABC).

On a, d'ailleurs,

$$\frac{-\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{-\mu} = 1,$$

ou (1) X_1 enveloppe Q_1, et l'on a (6), pour le point de contact,

$$-\frac{x^2}{\lambda}, \quad -\frac{y_2}{\mu}, \quad -\frac{z^2}{\nu}.$$

La même construction, qui donne deux points de Q, donne donc en même temps une tangente de Q_1.

21. Théorème. — *Si la droite* $\rho(xyz)$ *tourne autour du point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et si l'on détermine les points* $I(\lambda\beta z)$, $H(x\mu\gamma)$, $K(\alpha y\nu)$ *et* $I_1(\lambda_1 y\gamma)$, $H_1(\alpha\mu_1 z)$, $K_1(x\beta\nu_1)$, *les deux droites* $X(\lambda\mu\nu)$ *et* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ *envelopperont la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon* O, *et le point* XX_1, *pôle de* ρ, *décrira la conique* Q, *circonscrite selon la polaire* $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ *de* O.

On a (1)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{y} = 1, \qquad \frac{y}{\beta} + \frac{\gamma}{z} = 1, \qquad \frac{z}{\gamma} + \frac{\alpha}{x} = 1,$$

et comme

$$\begin{cases} \lambda\beta z = x\mu\gamma = \alpha y\nu = -1, \\ \lambda_1 y\gamma = \alpha\mu_1 z = x\beta\nu_1 = -1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant,

$$\frac{\beta}{\mu}+\frac{\nu}{\gamma}=1, \qquad \frac{\gamma}{\nu_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha}=1.$$

ou (1), X et X_1 enveloppent Q_1.

Soit $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ le point XX_1. On a

$$\alpha_1=\frac{\alpha y-\beta x}{\beta y(\gamma x-\alpha z)},$$

$$\beta_1=\frac{\beta z-\gamma y}{\gamma z(\alpha y-\beta x)},$$

$$\gamma_1=\frac{\gamma x-\alpha z}{\alpha x(\beta z-\gamma y)},$$

ou, d'après les équations de O,

$$\alpha_1-x=0, \qquad \beta_1+y=0, \qquad \gamma_1+z=0.$$

Donc O_1 est le pôle de ρ (tri. ABC), et, comme

$$\frac{\alpha_1}{-\alpha}+\frac{-\beta}{\beta_1}=1.$$

O_1 décrit la conique Q.

On a d'ailleurs (4), pour la tangente en O_1,

$$-\frac{x^2}{\alpha}, \quad -\frac{y^2}{\beta}, \quad -\frac{z^2}{\gamma}.$$

La même construction, qui donne deux tangentes de Q_1 donne donc aussi un point de Q.

22. Théorème. — *On donne une droite* $X(\lambda\mu\nu)$ *et un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *que l'on joint à un point* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *de* X *par la droite* ρ(LMN). *Si l'on prend les conjugués* L_1, M_1, N_1 *de* L, M, N *sur* OO_1, *les droites* AL_1, BM_1, CN_1 *seront concourantes en un point* $\omega(xyz)$, *et ce point* ω *décrira une conique* Q *circonscrite à* ABC *et pour laquelle* O *sera le pôle de* X.

Comme L_1 est le conjugué de L sur OO_1, x sera le conjugué de L sur $\alpha\alpha_1$. Or, on a

$$L = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}.$$

Donc

$$x = \frac{-(\beta + \beta_1)}{\beta\beta_1(\gamma + \gamma_1)}.$$

On trouve de même

$$y = \frac{-(\gamma + \gamma_1)}{\gamma\gamma_1(\alpha + \alpha_1)}, \qquad z = \frac{-(\alpha + \alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta + \beta_1)}.$$

On a ainsi le point $\omega(xy\,z)$, et les relations donnent

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(\alpha\beta + xy - \alpha y)}{\alpha\beta - xy + \alpha y},$$

$$\beta_1 = \frac{\beta(\alpha y + xy - \alpha\beta)}{xy - \alpha y + \alpha\beta},$$

$$\gamma_1 = \frac{+\gamma(\alpha\beta - xy + \alpha y)}{\alpha y + xy - \alpha\beta}.$$

Or, le point O_1 étant sur X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\beta_1}{\mu} = 1,$$

ou, en remplaçant,

$$x : \frac{\alpha(\lambda\mu + \alpha\beta + \mu\alpha)}{\lambda\mu - \alpha\beta - \mu\alpha} - \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta} : y - 1.$$

Donc (1) ω décrit la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X_1(\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1)$, pour laquelle

$$\lambda_1 = \frac{\alpha(\lambda\mu + \alpha\beta + \mu\alpha)}{\lambda\mu - \alpha\beta + \mu\alpha},$$

$$\mu_1 = \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta},$$

$$\nu_1 = \frac{-\gamma(\lambda\mu - \alpha\beta + \mu\alpha)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta}.$$

D'ailleurs, comme on a

$$\lambda = \frac{\mu_1 - \beta}{\mu_1\beta(\gamma - \nu_1)}, \qquad \mu = \frac{\nu_1 - \gamma}{\nu_1\gamma(\alpha - \lambda_1)}, \qquad \nu = \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1\alpha(\beta - \mu_1)},$$

X est la polaire de O (11) par rapport à Q.

Remarque I. — On voit aisément que, si O appartient à X, on a

$$\lambda\lambda_1 = \alpha^2, \qquad \mu\mu_1 = \beta^2, \qquad \nu\nu_1 = \gamma^2,$$

ou (4); X est une tangente en O, et ρ se superpose à X.

Si O était le pôle de X, on aurait

$$\alpha = -\lambda, \qquad \beta = -\mu, \qquad \gamma = -\nu,$$

et

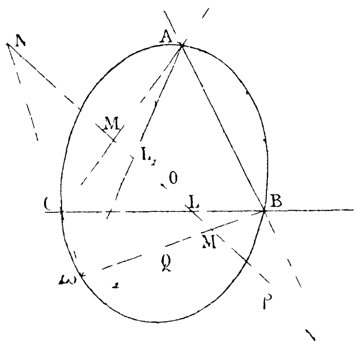
$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \mu_1 = \mu, \qquad \nu_1 = \nu,$$

ou X_1 se confondrait avec X.

Remarque II. — Le théorème permet de construire une conique dont on donne trois points A, B, C et le pôle O d'une droite X, ou, en particulier, trois points et le centre O.

Dans ce dernier cas, X passe à l'infini, ainsi que O_1. Si donc on prend (*fig.* 6) sur une droite ρ(LMN), pas-

Fig. 6



sant par le centre donné O, $OL_1 = -OL$, $OM_1 = -OM$, $ON_1 = -ON$, les droites AL_1, BM_1, CN_1 se couperont en un point ω de la conique.

23. Théorème. — *On donne un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et une droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *et par* O *on mène une droite* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, *qui coupe* X *en* ω. *Si par* ω *on mène les rayons* l_1, m_1, n_1, *conjugués des droites* ωA, ωB, ωC *dans l'angle* XX_1, *et coupant les côtés de* ABC *en* x, y, z, *on aura la droite* $\rho(xyz)$, *et cette droite enveloppera une conique* Q_1 *inscrite à* ABC *et pour laquelle* X *sera la polaire de* O.

Si ωA coupe BC en L, ce point sera le conjugué de x sur $\lambda\lambda_1$, et comme

$$L = \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)},$$

on aura

$$x = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)},$$

et de même

$$y = \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu + \nu_1)}, \qquad z = \frac{\mu + \mu_1}{\mu\mu_1(\lambda + \lambda_1)}.$$

On a donc la droite $\rho(xyz)$, et les relations donnent

$$\lambda_1 = \frac{\lambda(x - \lambda + \lambda\nu xy)}{\lambda - x + \lambda\nu xy},$$

$$\mu_1 = \frac{\mu(\lambda - x + \lambda\nu xy)}{\lambda + x - \lambda\nu xy},$$

$$\nu_1 = \frac{\nu(\lambda + x - \lambda\nu xy)}{x - \lambda + \lambda\nu xy}.$$

Or, puisque X_1 passe par O, on a

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1,$$

ou, en remplaçant

$$\frac{\lambda(\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta} : x + y : \frac{\mu(\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta} = 1.$$

Donc (1), ρ enveloppe la conique Q_1 inscrite selon le point $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, pour lequel

$$\alpha_1 = \frac{\lambda(\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta},$$

$$\beta_1 = \frac{\mu(\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta},$$

$$\gamma_1 = \frac{-\nu(\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta}.$$

D'ailleurs, comme on a

$$\alpha = \frac{\nu - \gamma_1}{\nu\gamma_1(\mu - \beta_1)}, \qquad \beta = \frac{\lambda - \alpha_1}{\lambda\alpha_1(\nu - \gamma_1)}, \qquad \gamma = \frac{\mu - \beta_1}{\mu\beta_1(\lambda - \alpha_1)},$$

O (14) est le pôle de X par rapport à Q_1.

Remarque I. — On voit aisément que si O appartient à X, cette droite est tangente en O, et que si O est le pôle de X (tri. ABC) O_1 se confond avec O.

Remarque II. — Le théorème permet de décrire une conique dont on donne trois tangentes *a*, *b*, *c* et la polaire X d'un point O, ou encore quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

24. Théorème. — *Si deux triangles sont circonscrits à* ABC *et homologiques avec lui (axes* X *et* X_1*), les droites qui joignent leurs sommets correspondants forment un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *inscrit dans* ABC *et homologique avec lui. Le centre* ω *d'homologie est le quatrième point commun aux coniques* Q *et* Q_1 *circonscrites à* ABC *selon les droites* X *et* X_1, *et l'axe* ρ *d'homologie est la droite qui joint les points* O *et* O_1, *pôles des droites* X *et* X_1 *par rapport à* ABC *et aussi par rapport à ces coniques.*

Coupons ABC par $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$. Les droites

$A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$, d'une part, et les droites $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$, d'autre part, forment les triangles IHK et $I_1H_1K_1$ circonscrits à ABC et homologiques, axes X et X_1 et centres $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$ et $O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1)$.

On a

$$\left\{\begin{array}{llll} II_1: & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu-\nu_1)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, & \dfrac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}, \\ HH_1: & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda-\lambda_1)}, & \dfrac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}, \\ KK_1: & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, & \dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}. \end{array}\right.$$

Ces valeurs montrent que les droites II_1, HH_1, KK_1 forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans ABC et homologique selon le centre $\omega(\alpha\beta\gamma)$,

$$\alpha = \frac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, \qquad \beta = \frac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, \qquad \gamma = \frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)},$$

et selon l'axe $\rho(x, y, z)$,

$$x = -\alpha, \qquad y = -\beta, \qquad z = -\gamma,$$

qui est la polaire de λ.

Or on a

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

c'est-à-dire que ω appartient aux deux coniques Q et Q_1 et par suite est leur quatrième point commun.

Les équations précédentes peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\frac{x}{-\lambda} + \frac{-\mu}{y} = 1, \qquad \frac{x}{-\lambda_1} + \frac{-\mu_1}{y} = 1,$$

ou l'axe ρ passe par

$$O(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

et

$$O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1),$$

pôles des droites X et X_1.

Remarque. — Si l'une des droites X, X_1 est fixe, on pourra décrire sa conique, en déplaçant l'autre droite.

23. Théorème. — *Étant donnés les deux points* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, *si les côtés correspondants des triangles* $\alpha\beta\gamma$ *et* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *se coupent en* A_1, B_1, C_1, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *sera circonscrit à* ABC *et homologique avec lui. L'axe* $\rho(\lambda\mu\nu)$ *d'homologie est la quatrième tangente commune aux coniques* Q *et* Q_1, *inscrites à* ABC *selon les points* O *et* O_1, *et le centre* $\omega(xyz)$ *d'homologie est le point de rencontre des droites* $X(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ *et* $X_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$, *polaires de* O *et* O_1 *par rapport à* ABC *et aussi par rapport à ces coniques.*

On a

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 : \dfrac{\gamma_1-\gamma}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, \quad \dfrac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, \quad \dfrac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}, \\[2ex] B_1 : \dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, \quad \dfrac{\alpha_1-\alpha}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, \quad \dfrac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}, \\[2ex] C_1 : \dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, \quad \dfrac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, \quad \dfrac{\beta_1-\beta}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}. \end{array}\right.$$

Ces valeurs montrent que les points (A, B_1, C_1), (A_1, B, C_1), (A_1, B_1, C) sont trois à trois en lignes droites, et que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes, c'est-à-dire que $A_1B_1C_1$ est circonscrit à ABC et homologique avec lui selon l'axe $\rho(\lambda\mu\nu)$,

$$\lambda = \frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, \qquad \mu = \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, \qquad \nu = \frac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)},$$

et selon le centre $\omega(xyz)$,

$$x = -\lambda, \qquad y = -\mu, \qquad z = -\nu,$$

qui est le pôle de ρ.

Or on a

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire que ρ enveloppe Q et Q_1 et par suite est la quatrième tangente commune à ces coniques.

Les équations précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{-\alpha}{x} + \frac{y}{-\beta} = 1, \qquad \frac{-\alpha_1}{x} + \frac{y}{-\beta_1} = 1,$$

ou (1) ω appartient à X et à X_1 et par suite est leur point de rencontre.

Remarque. — Si l'un des points O, O_1 est fixe, on pourra construire sa conique en déplaçant l'autre point.

26. Je termine cette Note en résumant les constructions obtenues de la conique Q de cinq points A, B, C, D, E. En prenant ABC pour triangle de référence, si Y et Z sont les polaires des points D et E, la polaire X du point O(YZ) sera la droite suivant laquelle la conique Q sera circonscrite à ABC. Après avoir obtenu, avec la règle, le point O et la droite $X(\lambda\mu\nu)$, on pourra tracer la conique Q :

I. Par le pôle ω d'une droite ρ passant par O;

II. A l'aide d'un point décrivant la droite X (16 ou 20);

III. En déplaçant une droite X_1 (24);

IV. En s'aidant du centre de la conique, que l'on obtient en joignant les sommets du triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ aux milieux des côtés de ABC, et utilisant la remarque II du n° 22.