E. Ballue

Une nouvelle définition du plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 56-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__56_0>

UNE NOUVELLE DÉFINITION DU PLAN;

Par M. E. BALLUE,
Professeur au lycée de Lorient.

On définit ordinairement le plan : une surface telle que la droite qui passe par deux quelconques de ses points est tout entière située sur cette surface.

Cette définition présente le grand inconvénient d'assujettir le plan à une infinité de conditions.

Ne pourrait-on définir le plan par une propriété caractéristique plus simple que la précédente, et déduire celle-ci de la nouvelle définition?

Tel est l'objet de cette étude.

Nous commencerons par rappeler la définition de la ligne droite et une de ses propriétés fondamentales.

Ligne droite. — On appelle *ligne droite* une ligne possédant la propriété suivante : *Par deux points on peut faire passer une ligne droite et l'on n'en peut faire passer qu'une.*

On déduit de cette définition la propriété suivante : Si l'on fixe deux points A et B d'un corps, et qu'on imprime un mouvement à ce corps, tous les points du corps situés sur la droite AB restent immobiles.

Plan. — Par analogie avec la ligne droite, nous appellerons *plan* une surface possédant la propriété suivante : *Par trois points on peut faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un si les trois points ne sont pas en ligne droite.*

Théorème. — *Deux plans quelconques* P *et* P′ *sont superposables dans toute leur étendue.*

Prenons trois points A, B, C, non en ligne droite, dans le plan P′. Transportons le plan P′ de manière que A et B viennent s'appliquer sur le plan P, et faisons tourner P′ autour des deux points A et B supposés fixes jusqu'à ce que le point C vienne s'appliquer sur le plan P. Les deux plans P et P′, passant par les trois mêmes points A, B, C, non en ligne droite, coïncident par définition.

Corollaire I. — *Un plan est une surface qui s'étend à l'infini dans tous les sens.*

En effet, un plan est déterminé par trois points A, B, C non en ligne droite, et ces trois points peuvent s'éloigner dans tous les sens aussi loin qu'on le désire.

Corollaire II. — *Un plan coïncide encore avec lui-même lorsqu'il a subi un déplacement.*

Corollaire III. — *Un plan coïncide encore avec lui-même après qu'on l'a retourné* (1).

Corollaire IV. — *Une figure plane peut être transportée dans son plan sans altération.*

Théorème. — *Par trois points en ligne droite* A, B, C *on peut faire passer une infinité de plans.*

---

(1) Il conviendrait peut-être de définir exactement le sens du mot *retourné*. On y parvient de la façon suivante : Un plan étant une surface qui s'étend à l'infini dans tous les sens partage l'espace en deux régions distinctes. On peut considérer un plan comme ayant deux faces, la première adjacente à la première région, la deuxième adjacente à la seconde. Retourner un plan, c'est le déplacer dans l'espace de manière que sa seconde face devienne adjacente à la première région et, par suite, la première face adjacente à la seconde région.

Par définition, on peut faire passer un plan P par les trois points en ligne droite A, B, C. Faisons tourner ce plan autour des deux points A et B supposés fixes. D'après la propriété de la ligne droite, le point C reste immobile. Le plan P passe donc constamment par le point C. Autrement dit, il passe une infinité de plans par les trois points A, B, C.

THÉORÈME. — *Un plan contient la ligne droite qui passe par deux de ses points.*

Soient A et B deux points d'un plan P, C un point quelconque situé sur la droite AB. Il suffit de démontrer que le plan P passe par C.

Par les trois points A, B, C en ligne droite, faisons passer un plan quelconque P' et faisons-le tourner autour des deux points A et B supposés fixes jusqu'à ce qu'un autre de ses points, D, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer P. Les deux plans P et P' passant par les trois mêmes points A, B, D, non en ligne droite, coïncident. Le point C n'a pas bougé pendant le mouvement de P'. Donc le plan P contient le point C.

C. Q. F. D.