

VASCHY

**Sur la définition des masses et des forces**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1895), p. 5-10

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1895\\_3\\_14\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__5_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

---

**SUR LA DÉFINITION DES MASSES ET DES FORCES <sup>(1)</sup>;**

PAR M. VASCHY.

---

I. — PRINCIPES FONDAMENTAUX ACTUELS  
DE LA DYNAMIQUE.

Dans l'enseignement actuel de la Mécanique rationnelle, la Dynamique est fondée sur les principes suivants :

- 1° Principe de l'inertie;
- 2° Principe de l'indépendance du mouvement acquis et des effets simultanés des forces;
- 3° Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

L'énoncé de ces principes n'est précédé d'aucune définition précise de la force. En réalité, ce sont ces principes mêmes qui, traduits sous une forme mathématique, lui servent purement et simplement de définition.

Cette manière d'introduire la notion de force *a priori* nous semble offrir le danger de suggérer aux élèves

---

(<sup>1</sup>) M. Fouret, à qui j'ai montré cette Note, m'a dit que, dans une Communication orale faite il y a quelques années à la Société philomathique, il a émis des idées analogues à celles que je présente. N'ayant point l'intention de reprendre cette question actuellement, il m'a engagé à l'exposer moi-même aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

l'idée que ce que l'on définit, c'est la *cause réelle* du mouvement dont l'étude au contraire n'intéresse nullement la Mécanique rationnelle. Mais un autre inconvénient bien plus grave est la lacune que nous allons signaler et qui existe dans les meilleurs traités.

Tout ce que l'on déduit des deux premiers principes se résume dans la définition de la force  $f$  qui imprime une accélération  $\omega$  à un point matériel A, *toujours le même*; on a, en grandeur et en direction, l'égalité

$$\bar{f} = m \bar{\omega},$$

le coefficient  $m$  étant choisi arbitrairement une fois pour toutes. Pour définir la force  $\bar{f}'$  qui imprime à un autre point A' une accélération  $\omega'$ , on écrirait de même

$$\bar{f}' = m' \bar{\omega}',$$

$m'$  désignant un nouveau coefficient aussi arbitraire que  $m$ . Tant qu'on s'en tient aux deux premiers principes, les coefficients  $m$  et  $m'$  étant arbitraires, le rapport des deux forces précédentes  $f$  et  $f'$  *n'a donc aucun sens*.

Pour définir par la formule

$$\frac{f}{f'} = \frac{m}{m'} \frac{\omega}{\omega'}$$

le rapport des masses  $m$  et  $m'$  des points A et A', comme on le fait ordinairement, il serait donc nécessaire de définir préalablement le rapport des deux forces  $f$  et  $f'$ , appliquées à deux points matériels différents, avec autant de précision que l'on en a mis à définir le rapport de deux forces appliquées à un même point. *C'est ce que l'on ne fait pas*; on suppose sans doute implicitement, sans aucune explication, que le rapport  $\frac{f}{f'}$  ci-

dessus est *bien défini en lui-même*, ce qui est insuffisant.

Cette lacune, il est vrai, se trouve comblée plus tard, dans l'étude des systèmes de points matériels, par cela même que l'on invoque le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Elle n'en subsiste pas moins, au début, dans la définition des forces et des masses; et, pour la faire disparaître, il y aurait lieu de modifier l'exposé des principes de la Dynamique.

Nous nous proposons de montrer qu'il serait bien plus naturel de commencer par définir la notion de masse, qui nous est fournie par l'expérience d'une manière très nette. La définition de la force ne soulèverait ensuite aucune difficulté.

## II. — LOI DE NEWTON.

Rappelons d'abord les résultats d'une étude plus importante que l'on fait généralement comme application de la *Cinématique*. On sait comment Newton a déduit des lois approchées de Képler cette conséquence que l'accélération  $\omega$  d'une planète est dirigée vers le centre du Soleil, et est inversement proportionnelle au carré de sa distance  $r$  à ce centre :

$$\omega = \frac{M}{r^2}.$$

La constante  $M$  a la même valeur pour toutes les planètes.

Attribuant cette action à la présence du Soleil, Newton a été conduit à généraliser la loi précédente et à admettre que la présence de chaque planète  $P_1$  a pour effet de contribuer à l'accélération d'une autre planète quelconque  $P_2$  par une composante  $\overline{\omega_{21}}$  dirigée de  $P_2$

vers  $P_1$  et ayant une grandeur égale à  $\frac{m_1}{r_{12}^2}$ ;  $r_{12}$  désigne la distance de  $P_2$  à  $P_1$ , et  $m_1$  un coefficient qui dépend de la planète influençante  $P_1$ , mais non de la planète influencée  $P_2$ . Pour la même raison,  $P_1$  doit subir, sous l'influence de  $P_2$ , une accélération  $\overline{\omega_{12}}$  opposée à la précédente et égale à  $\frac{m_2}{r_{12}^2}$ .

Cette loi a subi l'épreuve de nombreuses vérifications expérimentales, consistant à comparer les résultats de la théorie fondée sur elle aux résultats de l'observation du mouvement des astres; et on la considère comme parfaitement établie.

Des formules de  $\omega_{12}$  et de  $\omega_{21}$ , on déduit

$$m_1 \omega_{12} = m_2 \omega_{21} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

ou bien, en tenant compte des sens opposés des deux accélérations, et désignant par la notation  $\overline{\omega}$  une accélération considérée comme vecteur

$$m_1 \overline{\omega_{12}} + m_2 \overline{\omega_{21}} = 0.$$

Ce résultat, indépendant de la loi de l'inverse du carré de la distance, peut s'énoncer ainsi : « L'accélération d'une planète  $P_1$  sous l'action d'une planète  $P_2$ , et l'accélération de  $P_2$  sous l'action de  $P_1$  sont dirigées suivant la même droite en sens opposés; en outre, elles ont entre elles un rapport constant  $\frac{m_2}{m_1}$ , qui est l'inverse du rapport des *coefficients d'influence* de  $P_1$  et de  $P_2$ . »

Cette loi astronomique a été étendue par Newton à l'action réciproque de deux corps quelconques agissant l'un sur l'autre, soit à distance (cas de deux astres), soit au contact (cas de deux corps liés l'un à l'autre, cas

de deux corps qui se choquent). Elle n'a jamais été mise en défaut et paraît être d'une rigueur absolue.

Ces résultats étant acquis, il suffira, pour entrer dans le domaine de la Dynamique, de poser le principe et les définitions qui suivent.

### III. — PRINCIPE FONDAMENTAL ET DÉFINITIONS DE LA DYNAMIQUE.

On admet, comme principe fondamental de la Dynamique, la loi de Newton qui, dans le cas d'un couple de deux points matériels, s'énonce de la manière suivante :

*Si un point matériel  $A_1$  acquiert, sous l'action d'un point  $A_2$ , une accélération  $\omega_{12}$ , réciproquement  $A_2$  acquiert, sous l'action de  $A_1$ , une accélération  $\omega_{21}$ ; ces deux accélérations sont opposées suivant une même droite (joignant  $A_1$  et  $A_2$ ) et liées par la relation*

$$(1) \quad m_1 \overline{\omega_{12}} + m_2 \overline{\omega_{21}} = 0,$$

*$m_1$  et  $m_2$  désignant deux coefficients d'influence propres aux points  $A_1$  et  $A_2$  respectivement.*

*Définition des masses.* — Ainsi les divers points matériels  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ont des coefficients propres  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , dont les rapports deux à deux sont parfaitement déterminés en vertu de cette loi, l'un deux,  $m_1$  par exemple, pouvant être choisi arbitrairement. On donne à ces coefficients le nom de *masses*. Les masses des divers points matériels sont donc leurs coefficients d'influence respectifs au point de vue des actions qu'ils exercent sur d'autres points matériels.

L'application directe du principe de Newton, résumé

par la formule (1), ne saurait fournir un procédé pratique de comparaison des masses entre elles (sauf en Astronomie). Mais ce principe, qui est la base de la théorie des systèmes de points matériels soumis à des liaisons, notamment de la statique et de la dynamique des corps solides, permet d'établir les propriétés des instruments destinés à la mesure des poids ou des masses (levier, etc).

*Définition des forces.* — Définissons maintenant la grandeur et la direction d'une force  $\vec{f}$ , qui imprime une accélération  $\vec{w}$  à un point matériel A de masse  $m$ , par la formule

$$\vec{f} = m\vec{w}.$$

On pourra alors exprimer la relation (1) en disant que la force  $m_1\vec{w}_{12} = \vec{f}_{12}$  exercée par le point matériel  $A_2$  sur le point  $A_1$  est égale et opposée à la force  $m_2\vec{w}_{21} = \vec{f}_{21}$  exercée par le point  $A_1$  sur le point  $A_2$ . C'est là l'énoncé ordinaire du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.