NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALFREDO CAPELLI

Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__62_0>

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS PRINCIPAUX VARIENT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. ALFREDO CAPELLI, à Naples.

Les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique sont de la forme

$$F(z, y) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z+y & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z+2y & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+z+(n-1)y \end{vmatrix}.$$

Ils dépendent de deux variables z et y; mais ils peuvent toujours se développer, d'une façon très simple, à l'aide de déterminants qui jouissent de la même propriété et ne dépendent que de la variable y. On a, en effet, l'identité suivante

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(z, y) &= z(z+y)(z+2y)\ldots[z+(n-1)y] \\ &+ z(z+y)(z+2y)\ldots[z+(n-2)y]\sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\ldots[z+(n-3)y]\sum_{i<j\leqq n}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}+y \end{vmatrix} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\ldots[z+(n-4)y] \\ &\times \sum_{i<j<h\leqq n}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & a_{jj}+y & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hj} & a_{hh}+2y \end{vmatrix} + \ldots \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+y & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+(n-1)y \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Dans le second membre de cette identité, chaque somme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs des indices i, j, h, ... qui satisfont à l'inégalité qu'on voit au-dessous du signe $\sum$.

Ainsi, par exemple, on aura, pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+z+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z+2y \end{vmatrix}$$
$$= z(z+y)(z+2y) + z(z+y)(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$
$$+ z\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}+y \end{vmatrix} \right\}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+2y \end{vmatrix}.$$

L'identité (1) se déduit facilement d'une identité que j'ai établie par des considérations empruntées à la théorie des opérations invariantes (voir *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli*; marzo 1889). Ce ne serait donc pas sans intérêt si l'on pouvait donner une démonstration directe de cette formule.