

ALFREDO CAPELLI

**Sur les déterminants dont les éléments
principaux varient en progression
arithmétique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 62-63

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__62_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS PRINCIPAUX
VARIANT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;**

PAR M. ALFREDO CAPELLI, à Naples.

Les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique sont de la forme

$$F(z, y) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + z + y & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + z + 2y & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} + z + (n-1)y \end{vmatrix}$$

Ils dépendent de deux variables z et y ; mais ils peuvent toujours se développer, d'une façon très simple, à l'aide de déterminants qui jouissent de la même propriété et ne dépendent que de la variable y . On a, en effet, l'identité suivante

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} & F(z, y) = z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-1)y] \\ & + z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-2)y] \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \\ & + z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-3)y] \sum_{i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} + y \end{vmatrix} \\ & + z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-4)y] \\ & \times \sum_{i < j < h \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & a_{jj} + y & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hj} & a_{hh} + 2y \end{vmatrix} + \dots \\ & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + y & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + (n-1)y \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Dans le second membre de cette identité, chaque somme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs des indices i, j, h, \dots qui satisfont à l'inégalité qu'on voit au-dessous du signe \sum .

Ainsi, par exemple, on aura, pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + z + y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + z + 2y \end{vmatrix} \\ &= z(z+y)(z+2y) + z(z+y)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ &+ z \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} + y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} + y \end{vmatrix} \right\} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 2y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

L'identité (1) se déduit facilement d'une identité que j'ai établie par des considérations empruntées à la théorie des opérations invariantes (voir *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli*; marzo 1889). Ce ne serait donc pas sans intérêt si l'on pouvait donner une démonstration directe de cette formule.