NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale supérieure en 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 63-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__63_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894;

PAR M. J. LEMAIRE.

On considère les coniques représentées par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a-b)y = 0,$$

où a, b sont deux constantes et λ un paramètre variable :

1° *Prouver que, si λ varie, les polaires d'un point fixe* M *par rapport à ces coniques passent par un point fixe* P, *dont on calculera les coordonnées, au moyen des coordonnées du point* M ;

2° *On fait décrire au point* M *une droite arbitraire* Δ,

$$ux + vy + w = 0;$$

prouver que le point P *décrit alors une conique* S *et que, lorsque* Δ *se déplace dans le plan, la conique* S *se déforme en passant par trois points fixes* A, A′, A″. *Inversement, quand le point* P *décrit la conique* S, *le point* M *décrit la droite* Δ; *que devient-il quand le point* P *vient en l'un des trois points* A, A′, A″?

3° *Où doit être pris le point* M *pour que le point* P *soit rejeté à l'infini? Quelle position doit avoir la droite* Δ *pour que la conique* S *qui lui correspond soit une ellipse, une hyperbole, ou une parabole?*

4° *On considère toutes les coniques* S *qui sont des paraboles et, en particulier, les axes de ces courbes. Prouver que par tout point du plan il passe trois de ces axes; distinguer les points du plan pour lesquels ces trois axes sont réels et ceux pour lesquels un seul axe est réel;*

5° *Trouver le lieu des points pour lesquels deux de ces axes se coupent à angle droit.*

I. Les coniques C représentées par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a-b)y = 0 \tag{1}$$

passent par les quatre points fixes communs à la parabole

$$x^2 - 4(a-b)y = 0 \tag{2}$$

et aux deux droites

$$x(y-b) = 0. \tag{3}$$

On sait (théorème de Lamé) que les polaires d'un point fixe $M(x_0, y_0)$ par rapport à ces coniques ont un point commun P : la polaire de M est

$$x_0 x - 2(a-b)(y_0+y) + \lambda[x_0 y + x y_0 - b(x+x_0)] = 0.$$

Si donc x_1, y_1 sont les coordonnées de P, elles sont liées à celles de M par les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 x_1 - 2(a-b)(y_0+y_1) = 0, \\ x_0 y_1 + x_1 y_0 - b(x_0+x_1) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2(a-b)x_0(y_0+b)}{x_0^2 + 2(a-b)(y_0-b)}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{b x_0^2 - 2(a-b)y_0(y_0-b)}{x_0^2 + 2(a-b)(y_0-b)}. \end{cases}$$

Les équations (4) sont symétriques par rapport aux coordonnées des points M et P; donc on aurait les valeurs de x_0 et y_0 en fonction de x_1, y_1 par une simple permutation d'indices : la transformation, qui change M en P et réciproquement, est une transformation uniforme du second ordre.

II. Si M décrit la droite

$$(\Delta)\qquad ux + vy + w = 0,$$

P décrira une courbe dont nous aurons l'équation en éliminant x_0, y_0 entre les équations (4) et la suivante

$$ux_0 + vy_0 + w = 0.$$

Nous obtenons ainsi la conique

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{vmatrix} x & -2(a-b) & -2(a-b)y \\ y-b & x & -bx \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$2(a-b)ux(y+b)+v[bx^2-2(a-b)y(y-b)] \\ +w[x^2+2(a-b)(y-b)]=0.$$

Elle est de la forme

$$uC_1+vC_2+wC_3=0.$$

Quand Δ varie, les coniques (S) forment un réseau; on voit sans peine que les trois coniques $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$ ont trois points communs

$$\begin{aligned} &A(0, b), \\ &A'\left[+2\sqrt{b(a-b)}, -b\right], \\ &A''\left[-2\sqrt{b(a-b)}, -b\right]. \end{aligned}$$

Donc, quand Δ se déplace, S se déforme en passant par ces trois points fixes.

Remarquons que, si nous désignons par C'_1, C'_2, C'_3 ce que deviennent C_1, C_2, C_3 quand on y remplace x et y par les coordonnées de M, celles de P peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{C'_1}{C'_3}, \\ y_1 &= \frac{C'_2}{C'_3}, \end{aligned}\right.$$

et c'est parce que les trois coniques ont trois points communs que la transformation définie par les équations (4) est uniforme.

Si P vient en A, on a

$$x_1=0, \qquad y_1=b;$$

les expressions de x_0, y_0 en fonction de x_1 et y_1 se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Remarquons que les équations (4) se réduisent alors à

$$y_0+b=0.$$

Le point M correspondant à A est donc sur la droite A'A'', et par conséquent au point de rencontre de cette droite avec Δ.

De même si P vient en A' ou en A'', le point M correspondant se trouve au point de rencontre de Δ avec A''A ou avec AA'.

Ce résultat s'explique si l'on observe que AA'A'' est le triangle conjugué commun aux coniques (C).

III. Le point P sera rejeté à l'infini si les valeurs de x_1, y_1 sont infinies, c'est-à-dire si le point M est sur la parabole

$$C_3 = x^2 + 2(a-b)(y-b) = 0.$$

Toutefois si M est en A, point de cette parabole, les coordonnées de P ne sont plus infinies, mais indéterminées, les équations (4) se réduisent à

$$y_1 + b = 0.$$

P est indéterminé sur A'A''; cette droite est en effet la polaire de A, quelle que soit la conique S.

De même si M vient en A' ou A'', points situés aussi sur la parabole $C_3 = 0$, le point P est indéterminé sur A''A ou sur AA'.

La conique S est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole selon que l'on a

$$(a-b)^2 u^2 + 2(a-b)(bv+w)v \lesseqgtr 0,$$

ou, si nous supposons $a > b$, selon que

$$(a-b)u^2 + 2(bv+w)v \lesseqgtr = 0,$$

c'est-à-dire selon que la droite Δ a 0, 1 ou 2 points communs avec la conique

$$(5) \qquad (a-b)u^2 + 2(bv+w)v = 0,$$

qui est précisément la parabole $C_3 = 0$ déjà obtenue; conclusions inverses si $a < b$.

IV. Supposons que S soit une parabole; son axe est

$$(6) \qquad (u^2 + 4v^2)(ux - 2vy) - 2au^2v = 0.$$

Cette équation, qui exprime que l'axe passe au point (x, y), détermine, avec la condition (5), les coordonnées tangentielles des droites Δ correspondant aux paraboles dont les axes passent au point (x, y).

Le coefficient angulaire de la droite (6) a pour valeur $\frac{u}{2v}$. Posons $\frac{u}{2v} = \mu$, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad x\mu^3 - (y + a)\mu^2 + x\mu - y = 0.$$

C'est l'équation aux coefficients angulaires des axes des paraboles qui passent au point (x, y).

Par le point (x, y) passeront un ou trois axes réels, selon que l'équation (7) aura une ou trois racines réelles distinctes. Le lieu des points (x, y), pour lesquels elle aura une racine double, séparera donc les points du plan pour lesquels un seul ou trois axes seront réels. Ce dernier lieu s'obtient en écrivant que les dérivées de (7) par rapport à μ,

$$(3\mu^2 + 1)x - 2\mu y - 2a\mu = 0,$$

et par rapport au paramètre 1 d'homogénisation,

$$2\mu x - (\mu^2 + 3)y - a\mu^2 = 0,$$

ont une solution commune en μ, ce qui donne, en résolvant ces deux équations par rapport à x et à y, la courbe sous forme unicursale

$$x = \frac{2a\mu}{(1 + \mu^2)^2}, \qquad y = \frac{a\mu^2(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$

ou, en posant $\mu = \cot\frac{u}{2}$,

$$x = \frac{2a}{3}\sin u(1 - \cos u), \qquad y = -\frac{a}{2}\cos u(1 + \cos u).$$

On reconnaît immédiatement les coordonnées d'un point de l'hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon triple dont le centre, situé sur l'axe des y, a pour ordonnée $-\frac{a}{4}$; le point de contact du cercle qui roule, situé sur l'axe des y, a pour ordonnée, au départ, $-a$.

Cette courbe partage le plan en deux régions : pour les points de la région intérieure, pour le point $x = 0$, $y = -\frac{a}{2}$, par exemple, l'équation (7) a ses racines réelles, et par conséquent par chacun de ces points passent trois axes de paraboles réels; pour les points de la région extérieure, pour le point $x = \infty$, $y = 0$, par exemple, l'équation (7) a deux racines imaginaires, et par chacun de ces points passe un seul axe réel; quant aux points de la courbe, par chacun d'eux passent deux axes.

V. Le lieu des points pour lesquels deux des axes se coupent à angle droit s'obtient sans peine : soit (x, y) un pareil point; μ', μ'', μ''' les coefficients angulaires des axes passant par ce point. On a, par exemple,

$$\mu''\mu''' = -1.$$

Comme $\mu'\mu''\mu''' = \frac{y}{x}$, on en déduit $\mu' = -\frac{y}{x}$.

Écrivons que $-\frac{y}{x}$ est racine de l'équation (7), nous obtenons

$$y(2x^2 + 2y^2 + ay) = 0.$$

Le lieu est donc un cercle, car si $y = 0$, comme $\mu' \mu'' \mu''' = \frac{y}{x}$, nous ne tenons pas compte, en somme, de la condition $\mu'' \mu''' = -1$.

Nota. — Solution analogue par M. Barisien.