H. FEHR

Sur l'emploi de la multiplication extérieure en algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 74-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__74_0>

SUR L'EMPLOI DE LA MULTIPLICATION EXTÉRIEURE EN ALGÈBRE;

PAR M. H. FEHR.

1. Dans le t. X des *Nouvelles Annales,* M. Carvallo [1], après avoir défini très clairement la multiplication extérieure, a donné, à l'aide de cette notion, une exposition fort simple de la théorie des déterminants. La notion de produit symbolique, due à Cauchy et à Grassmann, joue un rôle fondamental dans la méthode de ce dernier. Elle a été employée avec succès par M. F. Caspary [2], qui a su faire ressortir, d'une façon très nette, les avantages que pouvait offrir, en Géométrie, l'emploi de la multiplication extérieure. En Algèbre, ce procédé de calcul est également d'un usage très fécond. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note, en me bornant simplement à la résolution d'un système d'équations linéaires et à l'élimination d'après Sylvester. Enfin j'exposerai brièvement la notion d'invariance d'une forme algébrique.

2. Rappelons simplement que la multiplication extérieure repose sur la *convention unique* que le produit

---

(1) *Nouvelles Annales,* 3e série, t. X, p. 219-224, 341-345; 1891. Dans le t. XI, le même auteur présente, avec une remarquable clarté d'exposition, les principes essentiels de la méthode de Grassmann. *Voir* aussi le *Bull. de la Soc. math.*, t. XV, p. 158-166.

(2) *Bull. des Sciences math.,* 2e série, t. XI, p. 222-242; 1887. *Voir* surtout dans le t. XIII, p. 202-240, son Mémoire intitulé : *Sur une méthode générale de la Géométrie qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique.*

des quantités e_1, e_2, ..., e_m, appelées *unités*, change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs, et que, par conséquent, tout produit renfermant deux fois la même unité est nul.

On vérifie sans peine que ces propriétés s'étendent encore aux quantités

$$p_i = \alpha_{i,1} e_1 + \alpha_{i,2} e_2 + \ldots + \alpha_{i,m} e_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

fonctions linéaires des e_i.

En particulier, si $n = m$, on arrive à la *définition des déterminants* donnée par M. Carvallo

$$[p_1 p_2 \ldots p_m] = \Delta [e_1 e_2 \ldots e_m],$$

le crochet [ ] étant, suivant la notation de Grassmann, le symbole de la multiplication extérieure. Comme on peut toujours supposer les e_i tels que l'on ait

$$[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1,$$

le déterminant formé par les $\alpha_{i,k}$ sera représenté par

$$\Delta = [p_1 p_2 \ldots p_m].$$

Le choix des unités dépend des applications que l'on a en vue. En Algèbre, on peut les considérer comme de simples quantités auxiliaires. Cauchy (¹) leur a donné le nom de *clefs algébriques*.

3. *Résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues* (²). — Soit le système

$$(1) \qquad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions ces équations respectivement par e_1, e_2, ...,

(¹) CAUCHY, *Exercices*, t. IV, p. 356; 1847, et *Comptes rendus*, 1853.

(²) *Voir* GRASSMANN. *Ausdehnungslehre*, A_1, §§ 45, 46.

e_n et additionnons membre à membre. Nous obtiendrons, en posant

$$(2)\quad \begin{cases} a_{1,k}e_1 + a_{2,k}e_2 + \ldots + a_{n,k}e_n = p_k & (k = 1, 2, \ldots, n), \\ b_1 e_1 \;+ b_2 e_2 \;+ \ldots + b_n e_n \;\;= p, \end{cases}$$

l'équation unique

$$(3)\qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = p$$

qui peut remplacer le système (1). On retrouve une équation de ce système, par exemple celle de rang i, en faisant $e_i = 1$, et les autres quantités e égales à zéro.

De l'équation (3) on déduit immédiatement, à l'aide de la multiplication extérieure, la valeur de l'une quelconque des inconnues. Ainsi on obtient x_1 en multipliant les deux membres de cette équation par

$$[p_2 p_3 \ldots p_n];$$

d'où

$$[p_1 p_2 \ldots p_n] x_1 = [p p_2 p_3 \ldots p_n].$$

En effet, les autres termes, renfermant chacun deux fois le même facteur p_i, disparaissent. D'une façon générale, nous aurons, pour la valeur de x_i, la relation simple

$$x_i = \frac{[p p_1 p_2 \ldots p_n]}{[p_1 p_2 \ldots p_n]}.$$

Si, comme plus haut, nous supposons $[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1$, le dénominateur représentera le déterminant du système. On reconnaît l'analogie de ce procédé avec la méthode ordinaire.

Résultant du système. — Supposons les quantités b_1 égales à zéro, le résultant du système proposé sera exprimé par

$$[p_1 p_2 \ldots p_n] = 0.$$

4. *Élimination.* — La multiplication extérieure facilite tout particulièrement le calcul dans le cas de la

méthode de Sylvester. Proposons-nous donc d'éliminer x entre les deux équations

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

dans lesquelles les a et les b sont des fonctions des autres variables, ou des quantités constantes, a_m et b_n étant différents de zéro.

Multiplions la première équation successivement par $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, et la seconde par $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$. Il en résultera un système de $m+n$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer les $m+n-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ considérées comme inconnues indépendantes.

C'est ici que s'applique avec avantage la méthode de Grassmann (¹). En effet, si nous additionnons ces $m+n$ équations, après les avoir multipliées respectivement par $e_1, e_2, \ldots, e_{m+n}$, nous aurons l'équation unique

$$p_1 x^{m+n-1} + p_2 x^{m+n-2} + \ldots + p_{m+n-1} x + p_{m+n} = 0,$$

dans laquelle les quantités p_i sont des fonctions linéaires des e. Multiplions les deux membres de cette relation par $[p_1 p_2 \ldots p_{m+n-1}]$, il restera simplement l'expression

$$[p_1 p_2 \ldots p_{m+n}] = 0$$

qui est le résultant des deux équations proposées. Ce n'est évidemment qu'une forme abrégée du déterminant de Sylvester, ce que l'on reconnaît facilement, d'après la méthode de M. Carvallo.

3. *La notion d'invariance.* — Considérons la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m$$

(¹) *Loc. cit.*, § 93.

et supposons que l'on ait $[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$. Si nous effectuons sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la substitution linéaire

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \ldots + a_{1m}\,\xi_m,\\
x_2 &= a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \ldots + a_{2m}\,\xi_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= a_{m1}\,\xi_1 + a_{m2}\,\xi_2 + \ldots + a_{mm}\,\xi_m,
\end{aligned}$$

le module de la transformation étant égal à un, la forme x devient

$$x = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \ldots + \xi_m \varepsilon_m,$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ forment un nouveau système d'unités exprimées linéairement en fonction des anciennes. Elles sont données par la substitution *inverse*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= a_{11}\,e_1 + a_{21}\,e_2 + \ldots + a_{m1}\,e_m,\\
\varepsilon_2 &= a_{12}\,e_2 + a_{22}\,e_2 + \ldots + a_{m2}\,e_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon_m &= a_{1m}\,e_1 + a_{2m}\,e_2 + \ldots + a_{mm}\,e_m.
\end{aligned}$$

Et, puisque le module a été pris égal à l'unité, nous avons $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m] = [e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$.

Nous arrivons donc à la remarque importante qu'une transformation linéaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ revient à un simple changement d'unités. On est immédiatement conduit à la définition très simple que :

Les formes invariantes sont celles qui ne changent pas pour une transformation linéaire des unités.

Cette définition est d'un caractère très général, vu qu'elle comprend à la fois les invariants, les covariants, les contrevariants et les autres formes analogues.

A l'aide de la multiplication extérieure, toute fonction homogène $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ peut être ramenée à la forme abrégée (¹)

$$f = ax^n,$$

où l'on a

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m.$$

Cette notation diffère peu de celle d'Aronhold, généralement usitée en Allemagne, où l'on pose

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^n.$$

On a, par exemple, pour la forme quadratique binaire dans l'un des systèmes

$$f = ax^2 = a(x_1 e_1 + x_2 e_2)^2 = ae_1^2 x_1^2 + 2ae_1 e_2 x_1 x_2 + ae_2^2 x_2^2,$$

tandis qu'on a dans l'autre

$$f = a_x^2 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 = a_1^2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2.$$

Mais si la notation d'Aronhold est purement symbolique, celle de Grassmann paraît tout à fait intuitive et présente ce grand avantage de permettre une interprétation géométrique immédiate.

Dans un de ses derniers Mémoires (²), Grassmann montre encore les liens étroits qui existent entre sa méthode et l'Algèbre moderne. Du reste, son Ouvrage de 1844 renferme les germes de la théorie des formes algébriques, telle qu'elle a été développée en Allemagne par Aronhold, Clebsch et Gordan.

(¹) *Voir* la démonstration dans l'Ouvrage de Grassmann, A_2, § 358. Consulter aussi le Traité de M. Schlegel (*Algèbre*, Leipzig, 1875), établi sur les principes de Grassmann. L'auteur consacre une place importante à un exposé élémentaire des formes binaires et ternaires.

(²) *Math. Annalen*, t. VII, p. 538; 1874. *Voir* aussi p. 12 du même tome.