NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARRIEU

Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 95-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__95_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES;

Par M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

I.

Nous nous proposons d'établir la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun sur des raisonnements généraux, qui s'appliquent indistinctement à tous les nombres commensurables, entiers ou fractionnaires.

La méthode suivie nous permettra de mettre en lumière les liens qui unissent le plus grand commun diviseur au plus petit multiple commun et le parallélisme complet qui existe entre les propriétés de ces deux fonctions.

Nous dirons qu'un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, est multiple d'un autre lorsqu'il est égal au produit de cet autre par un nombre entier.

Ainsi $\frac{12}{7}$ est un multiple de $\frac{4}{35}$, parce que l'on a

$$\tfrac{12}{7} = \tfrac{4}{35} \times 15.$$

Nous représenterons par les notations

$$\mathrm{D}(a, b. c, \ldots, l), \qquad m(a, b. c, \ldots, l)$$

le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun des nombres a, b, c, $\ldots$, l.

Décomposition d'un nombre fractionnaire en facteurs premiers. — On sait que tout nombre entier est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers et positifs.

Il en résulte immédiatement que tout nombre fractionnaire est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers, positifs ou négatifs. Ainsi

$$\frac{28}{45} = \frac{2^2 \times 7}{3^2 \times 5} = 2^2 \times 3^{-2} \times 5^{-1} \times 7.$$

Pour qu'un nombre soit entier, il faut et il suffit qu'il soit égal à un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers et positifs.

CONVENTION FONDAMENTALE.

Tout facteur premier qui n'entre pas dans un nombre sera considéré comme y entrant avec l'exposant zéro.

D'après cette convention, n nombres donnés quelconques, entiers ou fractionnaires, pourront toujours être considérés comme *composés des mêmes facteurs premiers,* de telle façon qu'un facteur premier quelconque p entrera toujours dans ces nombres avec n exposants entiers, *positifs, négatifs ou nuls,* que nous désignerons par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

Quand nous dirons que ces exposants sont rangés par ordre de grandeur croissante, cela signifiera que chacun d'eux est inférieur ou égal à celui qui le suit, et que l'on a

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_n.$$

Lemme. — *Pour qu'un nombre entier ou fractionnaire* A *soit divisible par un nombre entier ou fractionnaire* B, *il faut et il suffit que chaque facteur pre-*

mier entre dans A *avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans* B.

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soient α et β les exposants entiers, *positifs, négatifs ou nuls,* avec lesquels ce facteur entre respectivement dans A et B.

Le facteur p entrera dans le quotient A : B avec l'exposant entier $\alpha - \beta$. Donc, pour que ce quotient soit un nombre entier, il faut et il suffit que l'exposant $\alpha - \beta$ soit positif ou nul, ou, en d'autres termes, que α soit supérieur ou égal à β. C. Q. F. D.

Théorème I. — Loi de formation. — 1° *Pour former le plus grand commun diviseur de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant.*

2° *Pour former le plus petit multiple commun de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus fort exposant.*

(*Il demeure entendu que les facteurs premiers qui n'entrent pas dans un nombre doivent y être introduits avec l'exposant zéro.*)

Soient

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l$$

n nombres donnés, entiers ou fractionnaires.

Soit p un facteur premier *quelconque*, et soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

les exposants positifs, négatifs ou nuls, rangés par *ordre* *de grandeur croissante,* avec lesquels le facteur p entre dans les nombres donnés.

Considérons un nombre entier ou fractionnaire X, et désignons par x l'exposant positif, négatif ou nul, avec lequel le facteur p entre dans le nombre X :

1° Pour que le nombre X soit un codiviseur des nombres donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme, que l'on ait

$$x \leqq \alpha_1.$$

Le nombre X sera donc le plus grand codiviseur des nombres donnés lorsqu'on aura

$$x = \alpha_1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Pour que le nombre X soit un comultiple des nombres donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme, que l'on ait

$$x \geqq \alpha_n.$$

Le nombre X sera donc le plus petit comultiple des nombres donnés lorsqu'on aura

$$x = \alpha_n, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple de formation. — Trouver le plus grand commun diviseur des nombres

$$1, \quad 63, \quad \frac{28}{15}.$$

On a

$$1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0,$$
$$63 = 2^0 \times 3^2 \times 5^0 \times 7,$$
$$\frac{28}{15} = 2^2 \times 3^{-1} \times 5^{-1} \times 7;$$

d'où

$$D = 2^0 \times 3^{-1} \times 5^{-1} \times 7^0 = \frac{1}{15},$$
$$m = 2^2 \times 3^2 \times 5^0 \times 7 = 252.$$

Remarque. — Lorsqu'il entre parmi les nombres donnés un ou plusieurs nombres fractionnaires, il ne serait plus exact de dire que le plus grand commun diviseur se compose des facteurs premiers *communs* affectés de leur plus faible exposant, puisqu'il entre généralement dans sa composition des facteurs premiers *non communs;* tels sont les facteurs 3 et 5 dans l'exemple précédent. C'est ce qui nous a conduit à formuler une loi de formation plus générale que l'ancienne et qui, d'ailleurs, renferme l'ancienne comme cas particulier quand tous les nombres sont entiers.

Corollaire. — On déduit aisément de la loi de formation que le plus grand commun diviseur de n fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des numérateurs et pour dénominateur le plus petit multiple commun des dénominateurs.

De même, le plus petit multiple commun de n fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus petit multiple commun des numérateurs et pour dénominateur le plus grand commun diviseur des dénominateurs.

Théorème II. — Loi de corrélation. — *Étant données deux séries de nombres, entiers ou fractionnaires,*

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_n \quad (1^{re} \text{ série}),$$
$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad \ldots, \quad B_n \quad (2^e \text{ série}),$$

si l'on a

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = \ldots = A_n B_n = C, \tag{1}$$

le nombre C *est égal au produit du plus grand commun diviseur des nombres de l'une des séries par le plus petit multiple commun des nombres de l'autre, et* *l'on a*

$$\text{(I)}\qquad D(A_1, A_2, \ldots, A_n)\,m(B_1, B_2, \ldots, B_n) = C,$$
$$\text{(II)}\qquad m(A_1, A_2, \ldots, A_n)\,D(B_1, B_2, \ldots, B_n) = C.$$

En effet, soit p un facteur premier *quelconque*, qui entre dans C avec un exposant *positif, négatif ou nul*, que nous désignerons par γ.

Si nous remarquons que, d'après l'égalité (1), les nombres de la deuxième série sont respectivement égaux à

$$\frac{C}{A_1},\quad \frac{C}{A_2},\quad \frac{C}{A_3},\quad \ldots,\quad \frac{C}{A_n},$$

nous voyons que, si le facteur premier p entre dans les nombres de la première série avec les exposants

$$\alpha,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots,\quad \alpha_n,$$

rangés *par ordre de grandeur croissante*, ce même facteur p entrera dans les nombres de la deuxième série avec les exposants

$$-\alpha_1+\gamma,\quad -\alpha_2+\gamma,\quad -\alpha_3+\gamma,\quad \ldots,\quad -\alpha_n+\gamma,$$

qui se trouveront naturellement rangés par *ordre de grandeur décroissante*.

D'où il résulte que le facteur p entrera dans

$$D(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$$

avec l'exposant *minimum* α_1, et dans

$$m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$$

avec l'exposant *maximum* $-\alpha_1+\gamma$.

Il entrera donc dans le produit

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_n).m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$$

avec l'exposant

$$\alpha_1 - \alpha_1 + \gamma = \gamma.$$

c'est-à-dire avec le même exposant que dans C. On a donc

$$D(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n).m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n) = C. \quad (I)$$

On a de même

$$m(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n).D(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n) = C. \quad (II)$$

C. Q. F. D.

Ce théorème est *fondamental*. Il renferme implicitement toutes les propriétés essentielles du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun, comme nous le verrons tout à l'heure.

Mais nous devons auparavant examiner un cas particulier très intéressant. (*A suivre.*)