Émile Weill

Quelques remarques sur le théorème d'Euler concernant les polyèdres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 120-128
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__120_1>

[K14b]

QUELQUES REMARQUES SUR LE THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LES POLYÈDRES (1);

PAR M. ÉMILE WEILL,

Agrégé des Sciences mathématiques.

---

1. Nous définirons un *polyèdre :* une figure formée d'un nombre fini de polygones dont les plans diffèrent et tels que chacun de leurs côtés appartienne à deux de ces polygones et à deux seulement.

THÉORÈME D'EULER. — *Soient* F *le nombre des faces d'un polyèdre,* S *le nombre de ses sommets,* A *le nombre de ses arêtes. Il existe des polyèdres pour lesquels ces quantités sont liées par la relation*

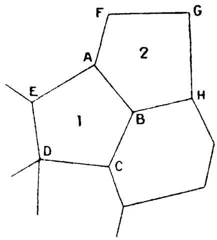
$$F + S = A + 2.$$

Supposons un polyèdre réalisé matériellement et cherchons à en séparer les faces les unes des autres. Nous pourrons d'abord enlever la face 1, limitée par le contour ABCDE, en donnant un trait de scie continu suivant ABCDE,A puis la face 2, en donnant un trait de

(1) La démonstration donnée dans cet article a été inspirée par la lecture du Chapitre IV du *Traité sur les fonctions algébriques et leurs intégrales,* de MM. Appell et Goursat.

scie continu suivant AFGHB, ce trait étant nécessairement interrompu en B et ainsi de suite.

Fig. 1.



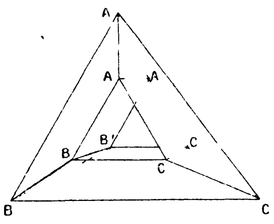
Nous supposerons que tous les traits de scie ainsi tracés sont efficaces, c'est-à-dire que chacun d'eux détache une face.

Ceci ne se présente pas toujours. Considérons, par exemple, le polyèdre obtenu comme suit :

Soient trois triangles ayant leurs côtés parallèles, mais situés dans trois plans différents. Joignons les sommets homologues.

Traçons dans ce polyèdre ABC A′B′C′A″B″C″ le trait de scie fermé ABCA, il est inefficace. Opérons encore

Fig. 2

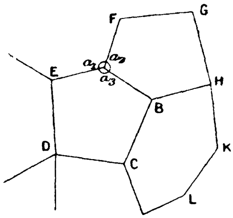


autrement : traçons les deux traits de scie AA′B′BA et B′C′CB; chacun d'eux sépare une face. Si, ensuite, nous traçons le trait BB″B′, il est inefficace.

Si cette particularité ne se présente pas, nous aurons évidemment séparé toutes les faces après F — 1 traits de scie.

Enlevons maintenant le sommet A à l'emporte-pièce; il sera remplacé par un trou. Ce trou n'altérera pas le

Fig. 3.



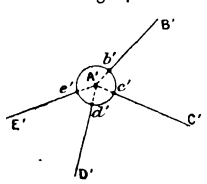
nombre de traits de scie continus nécessaires pour séparer toutes les faces du polyèdre. Le trait ABCDEA sera simplement remplacé par le trait a_3BCDEa_1.

Il n'en sera plus de même si nous supposons un sommet A′ du polyèdre autre que le sommet de départ remplacé par un trou.

A ce sommet aboutissent plusieurs faces 1′, 2′, ...,..

Soit 1′ la première de ces faces que nous séparons du reste du polyèdre. Le trait de scie qui suivait d'abord le

Fig. 4.



contour B′A′C′ sera morcelé en deux portions : l'une venant suivant B′b', l'autre partant de c' et se dirigeant suivant c'C′. Les autres traits de scie partiront des points d', c', au lieu de partir du point A′; ce sera leur seul changement.

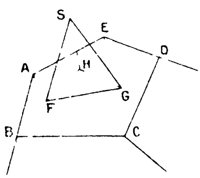
Chaque fois que nous remplacerons ainsi un sommet autre que le sommet de départ par un trou, nous augmenterons d'une unité le nombre de traits de scie continus nécessaires pour séparer toutes les faces du polyèdre.

Nous supposerons que, pour séparer toutes les faces du polyèdre, il ne soit pas nécessaire d'avoir deux ou un plus grand nombre de sommets origines de traits de scie.

Expliquons-nous sur un exemple :

Soient ABCDE une face d'un polyèdre quelconque et

Fig. 5



FGH un triangle situé dans le plan de cette face et à son intérieur. Un point S de l'espace et le triangle FGH déterminent un angle solide qui, avec le polyèdre primitif, constitue un nouveau polyèdre SFGHABCDE....

Si nous prenons le sommet S comme origine des traits de scie, nous séparerons d'abord les faces SFG, SGH, SHF, puis nous serons arrêtés et nous devrons choisir une nouvelle origine de traits de scie sur la seconde portion du polyèdre.

Nous supposerons enfin que, si nous remplaçons tous les sommets du polyèdre par des trous, le nombre des trous obtenus est déterminé sans ambiguïté ; c'est dire qu'il n'existe pas de sommet par lequel passent plusieurs nappes du polyèdre. Dans ce dernier cas, en enlevant le sommet considéré, on obtiendrait pour ainsi dire un trou multiple.

Dans ces conditions, les S sommets étant remplacés par S trous dont $S - 1$ sont efficaces, le nombre de traits de scie nécessaires pour séparer toutes les faces est

$$F - 1 + S - 1 = F + S - 2.$$

D'autre part, ce nombre est égal au nombre d'arêtes du polyèdre puisque tous les sommets sont enlevés, et l'on a bien

$$F + S - 2 = A,$$
$$F + S = A + 2.$$

C. Q. F. D.

Nous appellerons, avec M. Jordan, *polyèdres eulériens,* les polyèdres auxquels le théorème d'Euler est applicable.

THÉORÈME. — *Les polyèdres convexes sont eulériens.*

On démontre facilement que si un polyèdre présente la première particularité écartée dans la démonstration précédente, il existe un contact fermé, ne se coupant pas, formé d'arêtes du polyèdre et tel que si l'on coupe la surface polyédrale suivant ce trait, elle n'est pas partagée en deux portions distinctes; un polyèdre convexe ne peut donc présenter la première particularité.

Il ne peut présenter non plus la seconde particularité écartée car il faudrait qu'il ait une face limitée par plusieurs contours polygonaux.

Enfin, il ne peut présenter un sommet par lequel passent plusieurs nappes.

On peut donc lui appliquer la démonstration précédente.

2. On sait que le théorème d'Euler peut être généralisé. Ceci nous permettra de voir que les polyèdres eulé-

riens considérés dans ce qui précède ne sont pas les seuls de cette espèce.

Considérons un polyèdre ne présentant que la première singularité et supposons qu'on puisse tracer n traits de scie continus fermés sans morceler la surface polyédrale; ces traits de scie une fois tracés, la démonstration donnée est valable et la relation d'Euler devient:

$$F + S = A + 2 - n$$

(ce qui nous montre que le nombre n est un nombre invariable attaché au polyèdre).

Nous voyons que le second membre de la relation d'Euler a diminué.

Considérons maintenant un polyèdre ne présentant que la seconde singularité et supposons qu'il soit nécessaire d'avoir $m + 1$ sommets origines de coupures. Il n'y aura plus que $S - (m + 1)$ trous efficaces et la relation d'Euler devient

$$F + S = A + 2 + m.$$

Le second membre a augmenté.

On voit donc qu'un polyèdre pourra présenter des singularités diverses de telle façon que l'augmentation du second membre de la relation d'Euler, due à certaines d'entre elles, compense la diminution due aux autres.

Voici un exemple de ce fait :

Soient ABCDEF et A′B′C′D′E′F′ deux faces d'un polyèdre eulérien p. On a

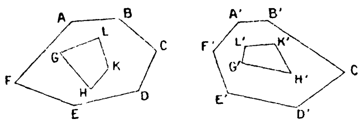
$$f + s = a + 2. \tag{1}$$

Soient, situés respectivement dans les plans de ces faces et intérieurs à leurs contours, deux polygones

GHKL et G′H′K′L′ qui sont deux faces d'un second polyèdre eulérien p' pour lequel on a

$$f' + s' = a' + 2. \tag{2}$$

Fig. 6.



L'accolement des polyèdres p et p' donne un polyèdre P pour lequel on a

$$F = f + f' - 2, \qquad S = s + s', \qquad A = a + a'.$$

Additionnant membre à membre les équations (1) et (2) il vient :

$$F + S = A + 2.$$

3. Nous avons vu l'influence des deux premières singularités écartées précédemment sur la relation d'Euler. Cherchons à voir ce qui se passe lorsque le polyèdre présente un sommet auquel aboutissent plusieurs nappes.

Considérons un polyèdre quelconque et son polyèdre polaire. On sait que si le théorème d'Euler ou une de ses généralisations est applicable au premier, ce même théorème ou la même généralisation est applicable au second.

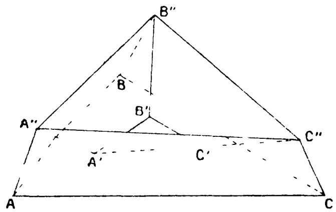
Si le polyèdre donné présente une face limitée par plusieurs contours polygonaux, le second présente un sommet par lequel passent plusieurs nappes de la surface polyédrale.

Nous nous bornerons au cas où le polyèdre donné présente une face limitée par deux contours polygonaux distincts.

De deux choses l'une : ou l'on ne peut pas passer d'un des sommets de l'un des polygones limitant cette face à l'un des sommets de l'autre polygone en suivant constamment des arêtes du polyèdre (c'est le cas de la seconde particularité que nous avons citée); ou l'on peut passer de l'un à l'autre de ces polygones en suivant les arêtes du polyèdre. Donnons un exemple de ce dernier cas.

Traçons, dans un plan, deux triangles ABC, $A'B'C'$ ayant leurs côtés parallèles, le triangle $A'B'C'$ étant

Fig. 7.



intérieur à ABC, et dans un plan parallèle au premier un triangle $A''B''C''$ ayant ses côtés parallèles à ceux des deux premiers; joignons AA'', $A''A'$, BB'', $B''B'$, CC'', $C''C'$. Le polyèdre obtenu jouit de la propriété énoncée.

Dans le premier cas, le polyèdre polaire du polyèdre donné a deux nappes passant par un sommet σ et telles qu'il est impossible, en partant de σ sur une des nappes, de revenir en ce point sur l'autre nappe en suivant constamment des arêtes du polyèdre. Si le polyèdre ne présente que cette singularité, le second membre de la relation d'Euler est plus grand que $A + 2$.

Dans le second cas, le polyèdre a deux nappes passant par un sommet σ et telles qu'il est possible, en partant de σ sur une des nappes du polyèdre, de revenir en ce point sur l'autre nappe en suivant constamment des arêtes. Si le polyèdre ne présente pas d'autre singularité, le second membre de la relation d'Euler est plus petit que $A + 2$.