NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1897. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 156-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__156_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

Paris.

Calcul différentiel et Calcul intégral.

Épreuve écrite. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-9y=e^x(x+a),$$

où a est une constante numérique.

Montrer que, pour une certaine valeur de a, l'intégrale générale de cette équation est une fonction uniforme de x dans tout le plan de la variable complexe x, et calculer explicitement l'intégrale pour cette valeur de a.

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère la famille de sphères*

$$(\Sigma)\qquad x^2+y^2+z^2-2az=0,$$

où a est une constante arbitraire :

1° *Déterminer toutes les surfaces* S *qui coupent orthogonalement chaque sphère* Σ;

2° *Déterminer les lignes de courbure de ces surfaces* S, *et montrer que les lignes de courbure d'une des deux familles sont des cercles.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8}.$$

Analyse supérieure.

Composition écrite. — 1° *On considère la fonction doublement périodique* u *définie par l'équation différentielle*

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \mathrm{A}u^4 + \mathrm{B}u^3 + \mathrm{C}u^2 + \mathrm{D}u + \mathrm{E}.$$

Montrer qu'on peut déterminer deux constantes m *et* p *de telle sorte que l'expression*

$$e^{\int_{z_0}^{z} dz \int_{z_0}^{z} (mu^2 + pu)\, dz}$$

soit une fonction entière *de* z. *Que devient cette fonction quand on remplace* z *par* $z+\omega$ *et par* $z+\omega'$, ω *et* ω' *désignant les deux fonctions de* u?

2° *Qu'appelle-t-on intégrale abélienne de première espèce pour une courbe algébrique* $f(x, y) = 0$?

Forme générale de ces intégrales; nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes.

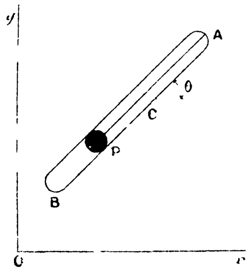
Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un tube rectiligne homogène* AB, *de section infiniment petite de longueur* $2a$ *et de masse* M, *est placé sur un plan horizontal, sur lequel il peut glisser sans frottement; dans l'intérieur du tube glisse, sans frottement, un point matériel* P *de masse* M *égale à celle du tube; ce point est attaché à l'une des extrémités* A *du tube par un fil élastique de masse négligeable qui, lorsqu'il n'est pas tendu, a pour longueur naturelle* a. *On admet que ce fil, lors-*

qu'il est tendu jusqu'en P, *possède une tension* F *proportionnelle à son allongement :*

$$F = \lambda^2(\overline{PA} - a) = \lambda^2.\overline{PC},$$

C *désignant le milieu du tube et* λ^2 *une constante.* A *l'instant initial, le fil est tendu de telle façon que le*



point matériel P *soit à l'extrémité* B *et le système est lancé sur le plan horizontal d'une manière quelconque.*

Étudier :

1° *Le mouvement du centre de gravité du système,*

2° *Le mouvement du système autour du centre de gravité.*

On examinera en particulier le cas où le système est abandonné à lui-même sans vitesses initiales.

On appellera θ *l'angle du tube* BA *avec* Ox, *et* r *l'allongement du fil*

$$r = \overline{PA} - a = \overline{PC}.$$

Épreuve pratique. — *On donne un prisme droit homogène dont la masse est* 1^{gr}, *dont la base est un triangle équilatéral de* 1^{cm} *de côté et dont la hauteur est* 2^{cm}. *Déterminer la position du centre de gravité du prisme et les éléments de l'ellipsoïde central d'inertie relatif au centre de gravité.*

Mécanique physique.

Épreuve écrite. — 1° *Une parabole roule sans glisser sur une droite. Construire le cercle des inflexions et le cercle des rebroussements pour une position particulière quelconque de la parabole. Construire le rayon de courbure de la trajectoire du foyer et le rayon de courbure de la courbe enveloppée par la directrice de la parabole.*

On pourra s'appuyer sur la propriété suivante de la parabole :

Le rayon de courbure est double du segment de normale compris entre la courbe et la directrice.

2° *Réunir par un train d'engrenage deux arbres parallèles* A *et* B *tournant en sens inverse avec des vitesses de* 323 *tours à la seconde pour* A *et* 234 *tours à la seconde pour* B.

Épreuve pratique. — *Une roue dentée* R *dont la circonférence primitive a* 8^{cm} *de rayon engrène avec une autre roue* R′ *dont la circonférence primitive a un rayon double, soit* 16^{cm}.

Le système adopté est le système dit à flancs. *On demande de construire le profil de l'excédent épicycloïdal d'une dent de la roue* R′, *en admettant que le module de la roue* R *soit égal à* 8.

On ne tiendra pas compte du jeu.

Physique mathématique

Épreuve écrite. — *Equations aux dérivées partielles régissant la vitesse* u *en fonction des coordonnées transversales* y, z, *dans l'écoulement uniforme, bien continu, d'un liquide, le long d'un tube fin mouillé par ce liquide. Leur intégration ou approchée,* *ou exacte, pour toute forme donnée de la section normale du tube, au moyen d'une expression de u entière et finie en y, z. Application aux deux cas : 1° d'une section elliptique; 2° d'une section triangulaire équilatérale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le problème constituant l'épreuve écrite, l'expression de la vitesse u à travers une section σ triangulaire équilatérale était*

$$u = \frac{\rho g I}{\varepsilon} \frac{pp'p''}{p + p' + p''},$$

ρg désignant le poids spécifique du fluide, ε son coefficient de frottement intérieur, I la pente motrice, et p, p', p'' les trois perpendiculaires menées du point intérieur quelconque (y, z) considéré de la section σ, aux trois côtés de celle-ci. Effectuer la quadrature

$$\int\int u\,dy\,dz,$$

qui fait connaître le volume fluide débité dans l'unité de temps par l'aire triangulaire

$$T = \int\int dy\,dz.$$

MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Autour d'un corps central de masse M circule une planète dont la masse m' est finie, mais très petite; l'orbite de cette planète est circulaire et son grand axe est égal à a', de telle façon que ses coordonnées rectangulaires, par rapport à des axes mobiles ayant leur origine en M, soient*

$$x = a' \cos n't, \qquad y = a' \sin n't.$$

Autour de ce même corps central M, et dans le *même plan que la planète troublante, circule une autre planète m. On suppose :*

1° *Que la masse de m est infiniment petite ;* 2° *que le grand axe a de la planète troublée est beaucoup plus petit que le grand axe de la planète troublante ;* 3° *que l'excentricité e de la planète troublée est très petite.*

On négligera m'^2, $m'\left(\frac{a}{a'}\right)^3$, $m'e$, e^2 *et l'on calculera les coordonnées rectangulaires de la planète troublée par rapport à des axes mobiles ayant leur origine au corps central* M.

Épreuve pratique. — *On donne l'anomalie moyenne* 24° 16′ 11″ *d'un astre et son excentricité* 0,2, *et l'on demande de calculer son anomalie excentrique.*

Astronomie.

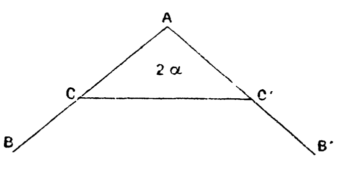
Épreuve pratique. — *La déclinaison du* Soleil *étant supposée égale à* 18° 27′ 16″, *calculer la distance zénithale de cet astre à* 6^h, *temps vrai de Paris.*

Latitude de Paris : 48° 50′ 11″.

Nota : *On fera les calculs avec des logarithmes à* 5 *décimales.*

École Normale (deuxième année).

Mécanique. — *Sur un plan horizontal parfaitement poli, sont placées deux barres homogènes égales* AB



et AB′, *articulées en* A : *la masse de chacune de ces barres est* M *et sa longueur* $2a$. *Les milieux* C *et* C′

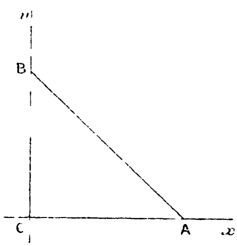
des barres sont attachés l'un à l'autre par un fil élastique dont on néglige la masse et dont la longueur à l'état naturel est a. Les barres étant écartées l'une de l'autre de façon à tendre le fil et à lui donner une longueur r_0 supérieure à a, on abandonne le système à lui-même sans vitesses initiales. *Trouver le mouvement.*

On appellera 2α l'angle BAB′ et r la longueur du fil CC′ à un instant quelconque t. On admettra que la tension du fil élastique CC′, quand sa longueur est r, est proportionnelle à son allongement $r - a$ et par suite que l'intensité de cette tension est

$$M\lambda^2(r - a),$$

λ^2 étant une constante donnée.

Cinématique. — *Un segment de droite AB glisse sur*



deux droites rectangulaires Ox, Oy, avec une vitesse angulaire constante.

Trouver le centre des accélérations et construire le centre de courbure de la courbe enveloppée par la droite AB.

Astronomie. — 1° *Déterminer la longitude d'un lieu par une observation de hauteur du Soleil.*

Données :

Latitude de la station	43° 18′ 17″,5
Hauteur du centre du Soleil ...	42° 26′ 13″,4
Déclinaison du Soleil..........	18° 15′ 27″,5
Heure vraie de Paris..........	$3^h\ 1^m\ 53^s,8$

La hauteur du Soleil est affranchie de la réfraction et de la parallaxe. L'observation a été faite après le passage au méridien.

2° *Si la hauteur du Soleil est erronée de* 30″, *quelle sera l'erreur correspondante de la longitude?*

Rennes.

Analyse. — *Quels sont les conoïdes droits pour lesquels la somme des projections, sur l'axe* Oz, *des deux rayons de courbure principaux au point quelconque* M *de la surface, varie proportionnellement au carré de sa distance à l'axe?*

SESSION DE NOVEMBRE 1897. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse.

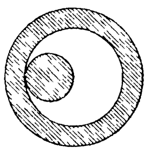
Sur une sphère de rayon un on donne un grand cercle C; P *étant le pôle de ce grand cercle, déterminer une courbe* S *telle que l'arc de* S *compris entre un point fixe* I *de cette courbe et un point variable* M *de la courbe soit égal à l'arc du grand cercle* C *intercepté entre les grands cercles* PI *et* PM. *Calculer l'aire du triangle* PIM *limité par les arcs de grand cercle* PI, PM *et l'arc* IM *de* S.

L'aire demandée s'exprime aisément à l'aide des angles du triangle PIM, elle est $H + P - I - M$.

MÉCANIQUE.

1° *Deux triangles rigides sans masse* BAD, CAE *sont articulés en leur sommet* A, *leurs sommets* B *et* C *glissent sans frottement sur une horizontale fixe; en* A *est suspendu un poids* P, D *et* E *sont réunis par un fil élastique. On demande la position d'équilibre.*

2° *Dans un plan vertical, un disque creux pesant roule sans glisser par sa surface intérieure sur un*



support circulaire. Chaque point du disque est soumis à un frottement proportionnel à la surface. On demande de déterminer le mouvement.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Dire ce que représente, en coordonnées rectangles, l'équation*

$$x^2 + y^2 - az = 0;$$

montrer que les normales à la surface rencontrent OZ; *volume compris entre la surface et les plans* $z = 0$, $z = a$; *aire de la surface entre les mêmes plans* $\left[\frac{1}{6}\pi a^2(5\sqrt{5} - 1)\right]$.

II. *Mouvement d'un point* M *assujetti à rester sur* *un cercle de centre* C, *de rayon* R *et attiré vers un point* O *de la circonférence par une force* $\frac{4mK^2R^2}{\overline{OM}^3}$; *à l'instant initial, l'arc* OM *est un quadrant et la vitesse, égale à* K, *est dans le prolongement de* OM

$$\left(\sin MOC = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{Kt}{2R}}\right).$$

Épreuve pratique. — *La latitude d'un lieu étant supposée égale à la déclinaison d'une étoile, la calculer de telle sorte que, dans le mouvement diurne, l'étoile reste dix-huit heures sidérales au-dessus de l'horizon.*

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Lignes asymptotiques.*

II. *Déterminer les fonctions* φ *et* ψ, *de sorte que* $u = \varphi(x)\psi(y)$ *soit une intégrale de*

$$(1-x)\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0;$$

particulariser les fonctions de telle sorte qu'on ait

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = -1, \qquad \psi(1) = 0, \qquad \psi'(1) = 1.$$

Substituant u dans (1), on en tire

$$\frac{(1-x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + \psi(y)}{\psi(y)};$$

chaque fraction doit être égale à une constante α

$$\varphi(x) = A(1-x)^{-\alpha}, \qquad \psi(y) = By^{\sqrt{\alpha-1}} + Cy^{-\sqrt{\alpha-1}}:$$

avec les données initiales proposées, $\alpha = -1$,

$$\varphi(x) = 1 - x, \qquad \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\log y).$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$y^{\text{VII}} - 3y^{\text{VI}} + 7y^{\text{V}} - 13y^{\text{IV}} + 16y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 3x^2 - 1.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — I. *Un angle* BAC, *égal à* 60°, *se déplace sur un plan, de sorte que* AB *passe par un point fixe* O *et que* AC *reste tangente à une développante d'un cercle ayant son centre en* O. *Lieux du centre instantané* I *dans le plan fixe et le plan mobile, cercle des inflexions, lieu de* A *dans le plan fixe, son centre de courbure.*

I décrit un cercle de centre O dans le plan fixe, une parallèle à AB dans le plan mobile; le lieu de A est une spirale d'Archimède.

II. *Mouvement d'une plaque carrée homogène* ABCD *qui glisse sur un plan fixe,* A *restant sur une droite fixe* OX : *chaque élément* m *est attiré vers* O *par une force* $m\omega^2\overline{Om}$; *pour* $t = 0$, A *est immobile en* O, B *sur* OX *avec une vitesse* $\omega\overline{AB}$. *Pression de* A *sur* OX.

L'équation qui détermine l'abscisse du centre de gravité G et l'équation des forces vives montrent que G décrit uniformément un cercle de centre O; A y demeure, sa pression sur OX est nulle.

Épreuve pratique. — *Un tétraèdre homogène, de masse égale à* 20, *est compris entre les trois plans coordonnés rectangulaires et le plan* $\frac{x+y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. *Équation de l'ellipsoïde d'inertie en* O, *moments principaux d'inertie; direction des axes principaux.*

Le calcul se simplifie et peut offrir quelque intérêt aux étudiants.

Équation de l'ellipsoïde rapporté aux axes donnés

$$26x^2 + 26y^2 + 16z^2 - 12yz - 12zx - 8xy = 1.$$

Moments principaux : 30, 28, 10.

Cosinus directeurs des axes correspondants :

1° $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0;$

2° $\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

3° $\quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad \dfrac{2}{\sqrt{6}}.$

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Intégrer les équations différentielles totales*

$$\frac{du}{dx} = mx + ny + pu, \qquad \frac{du}{dy} = \mu x + \nu y + \varpi u,$$

où $m, \ldots, \varpi$ représentent des constantes quelconques.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un cylindre de révolution homogène pesant peut tourner autour de son axe qui est vertical. Ce cylindre est creusé d'un canal infiniment étroit, dont l'axe curviligne est une hélice dont le pas est la hauteur du cylindre et dont le rayon est celui du cylindre.*

Une bille pesante est abandonnée sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure du tube. Le cylindre est lui-même abandonné sans vitesse initiale.

On demande le mouvement du système.

On appliquera les théorèmes du mouvement des systèmes.

Épreuve pratique. — *Calculer les moments principaux d'inertie d'un cube homogène relatifs à un de ses sommets. Le côté du cube est de* 1^{m}.

Astronomie.

Épreuve pratique. — *En un lieu dont la latitude est* $8^{\circ}58'53''$, *on donne la distance zénithale d'une certaine étoile* $69^{\circ}42'30''$ *et son azimut* $300^{\circ}10'30''$.

On demande de calculer la déclinaison et l'angle horaire de cette étoile au même instant.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Trouver les trajectoires orthogonales des tangentes à une chaînette de paramètre a.*

II. *On considère celle des trajectoires précédentes qui passe par le sommet de la chaînette : c'est la tractrice. Montrer qu'elle satisfait à l'équation*

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

et calculer la longueur de sa tangente limitée au point de contact et à l'axe des x. Équation de la tractrice.

III. *Calculer le produit des rayons principaux de courbure pour un point quelconque de la surface engendrée par la rotation de la tractrice autour de son asymptote.*

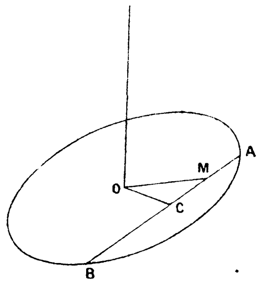
Épreuve pratique. — *Développer suivant les puissances entières positives et croissantes de x la fonction*

$$y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}.$$

Valeurs de x, réelles ou imaginaires, pour lesquelles le développement est convergent.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un disque circulaire homogène peut tourner librement autour de son axe* Oz *qui est vertical et fixe. Dans une section droite* O *et suivant*



une corde AB, *égale au côté du triangle équilatéral inscrit, est creusé un canal à section infiniment petite, dans lequel peut glisser sans frottement un point matériel* M, *de masse m, attiré vers le point* O *par une force* $R = -m\mu\rho$, *proportionnelle à la distance à ce point.*

On demande le mouvement du système.

Données initiales : Au début, le disque a une vitesse angulaire donnée ω et le point M *est placé en* A, *à une des extrémités du tube, sans vitesse relative dans le système. De plus, en appelant* M *la masse du disque, on a* $m = \frac{M}{2}$. *On examinera les deux cas particuliers* *suivants :*

$$\mu = \frac{8}{5}\omega^2. \qquad \mu = 8\omega^2.$$

Si OC est la perpendiculaire menée sur le milieu de AB, la position du système sera déterminée par la connaissance de l'angle θ, formé par OC avec un axe horizontal fixe passant par O et la distance $\mathrm{CM} = r$ de M à C. Deux équations suffiront donc, et ces deux équations seront fournies immédiatement par le théorème des forces vives et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Oz, appliqués au système total. Nous pouvons remarquer que le système peut être supposé pesant ou non pesant sans que ces équations soient modifiées; il n'y aura de changement que pour les expressions des pressions supportées par l'axe et des réactions mutuelles du disque et du point M. Les axes étant Oz et deux droites fixes rectangulaires dans le plan horizontal de O, si a est le rayon du disque, sa force vive sera $\mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta'^2$, la somme des moments des quantités de mouvement de tous ses éléments $\mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta'$; pour le point M, nous aurons les formules

$$x = \frac{a}{2}\cos\theta - r\sin\theta,$$

$$y = \frac{a}{2}\sin\theta + r\cos\theta,$$

d'où l'on déduit aisément

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right)^2 + r^2\theta'^2,$$

$$xy' - yx' = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right) + r^2\theta'.$$

et nous aurons les deux équations

$$(1)\quad M\frac{a^2}{2}\theta'^2+m\left[\left(\frac{a}{2}\theta'+r'\right)^2+r^2\theta'^2\right]=-m\mu\left(\frac{a^2}{4}+r^2\right)+h,$$

$$(2)\quad M\frac{a^2}{2}\theta'+m\left[\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\theta'+r'\right)+r^2\theta'\right]=k,$$

h et k étant deux constantes.

Ces deux équations se ramènent immédiatement à des quadratures, et l'on trouve les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} m\left(M\frac{a^2}{2}+mr^2\right)r'^2=&\left(M\frac{a^2}{2}+m\frac{a^2}{4}+mr^2\right)\\ &\times\left[h-m\mu\left(\frac{a^2}{4}+r^2\right)\right]-k^2;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \theta'=\frac{k-m\frac{a}{2}r'}{M\frac{a^2}{2}+m\frac{a^2}{4}+mr^2}.$$

La première se ramène à une quadrature elliptique. Dans les deux cas particuliers indiqués, l'intégration peut se faire.

Si l'on pose

$$f(r^2)=\left(M\frac{a^2}{2}+m\frac{a^2}{4}+mr^2\right)\left[\left(h-m\mu\left(\frac{a^2}{4}+r^2\right)\right]-k^2,$$

les hypothèses $m=\frac{M}{2}$, $(r')_0=0$, $(\theta')_0=\omega$ donnent

$$f(r^2)=\left(3\frac{a^2}{4}-r^2\right)\left[\mu r^2+\left(\frac{5}{4}\mu-2\omega^2\right)a^2\right].$$

Si $\frac{5}{4}\mu-2\omega^2>0$, le mouvement est oscillatoire et M va de A à B, puis revient de B à A, etc. dans des temps égaux.

Si $\frac{5}{4}\mu-2\omega^2<0$, deux cas se présentent :

Si $\dfrac{2\omega^2 - \frac{5}{4}\mu}{\mu} < \dfrac{3}{4}$, ou $\omega^2 < \mu$, l'oscillation se produit entre A et un point A′ compris entre C et A ; si $\omega^2 = \mu$, A est en équilibre relatif ; si $\omega^2 > \mu$, le point quitte le canal.

Si $\mu = \frac{8}{5}\omega^2$, la position A′ vient en C, mais le mouvement n'est plus oscillatoire, M n'arrivant en C qu'après un temps infini. On peut du reste intégrer dans ce cas.

Enfin, si $\mu = 8\omega^2$, on aura

$$f(r^2) = \mu(a^2 + r^2)\left(3\frac{a^2}{4} - r^2\right),$$

on peut diviser les deux membres de l'égalité qui donne r^2 par $a^2 + r^2$ et il vient, en posant $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

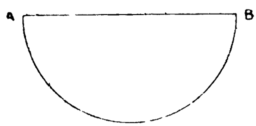
$$\sqrt{\mu}\, dt = -\frac{dr}{\sqrt{b^2 - r^2}},$$

d'où

$$r = b \cos t\sqrt{\mu},$$

et tout se passe dans le mouvement relatif comme si M était attiré par C proportionnellement à la distance.

Épreuve pratique. — *On suppose que dans un demi-cercle matériel, limité par le diamètre* AB, *le poids*



spécifique en chaque point est proportionnel à la distance du point à AB. *On demande :*

1° *Le centre de gravité de la plaque ;*

2° *La longueur du pendule simple synchrone du pendule composé, que l'on obtiendrait en faisant* *tourner un demi-cercle égal au premier, mais supposé homogène autour de* AB, *supposé horizontal et fixe.*

On vérifiera que cette dernière longueur est la distance à AB *du centre de gravité de la plaque non homogène.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Les éléments d'une planète étant connus, exposer la suite des calculs qui permettent de déterminer ses coordonnées apparentes, ascension droite et déclinaison, pour une époque donnée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'anomalie excentrique qui correspond à une anomalie moyenne*

$$m = 332^\circ 28' 54'', 77,$$

dans une orbite dont l'excentricité est donnée par

$$\log e = \bar{1},3897262.$$

Emploi de l'équation de Kepler.

Lille.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

1° *Étude de l'intégrale hyperelliptique*

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)-(z-a_q)}};$$

périodes, points singuliers, fonction inverse.

2° *Intégrer l'équation*

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 1 - axy + ax^2y^2 = 0.$$

Mécanique rationnelle.

Un tube rectiligne AB, *homogène, pesant, de masse* M *et de section négligeable, est assujetti à se mouvoir sans frottement dans un plan vertical, autour de son centre de gravité* O. *Un point matériel pesant* M, *de masse m′ comparable à m, se meut en même temps, sans frottement, dans le tube* AB :

1° *Former les équations différentielles du mouvement du système, en prenant pour variables la longueur* $OM = \lambda$, *et l'angle* $AOx = \theta$ *du tube* AB *avec l'horizontale* Ox ;

2° *Étudier approximativement les petites oscillations. On supposera que* θ *et* λ *sont nuls à l'instant initial, et l'on choisira les vitesses initiales* θ'_0 *et* λ'_0, *supposées toutes deux très petites, de manière que, pendant un certain temps, le tube et le point matériel se retrouvent très sensiblement, après chaque oscillation, dans les mêmes positions respectives qu'à l'instant initial.*

Mécanique appliquée.

Épreuve pratique. — *Avant-projet d'une machine à vapeur, à un cylindre, à double effet, à détente et à condensation, avec distribution par tiroir simple à recouvrements :*

1° *Diagramme pratique. Connaissant la pression au générateur, le nombre de tours, le degré de détente et les diverses avances, on déterminera, en tenant compte de l'espace mort et des pertes de charge à l'admission, les dimensions du cylindre, de façon que la machine ait une puissance de 25 chevaux.*

2° *Épure de distribution. Connaissant le rayon de l'excentrique, on déterminera les recouvrements de* *manière à réaliser les conditions imposées par le diagramme.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu de colatitude γ, trouver l'ascension droite x du point de l'équateur qui se lève en même temps qu'une étoile connue (dont α et Δ sont l'ascension droite et la distance polaire), et la différence y d'azimut entre ce point et l'étoile.*

Applications :

$$\gamma = 39^\circ 21' 16'',0, \qquad \alpha = 5^h 9^m 35^s,23, \qquad \Delta = 108^\circ 19' 15'',1.$$

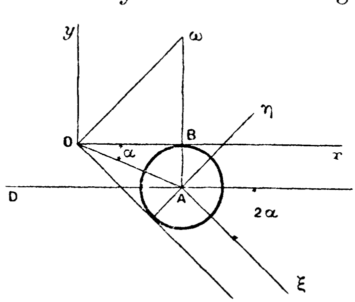
Lyon.

MÉCANIQUE.

I. *Une barre pesante, homogène, sans épaisseur, tourne librement autour d'un de ses points fixes. On demande : 1° de poser les équations différentielles du mouvement ; 2° de déterminer les conditions initiales de façon que la barre décrive un cône de révolution à axe vertical ; 3° de calculer la réaction du point fixe.*

Appliquer les théorèmes : 1° des forces vives ; 2° des aires en projection sur un plan horizontal.

II. *Un cercle de rayon* R *et une tangente liée au*



cercle se meuvent ainsi qu'il suit : 1° le centre décrit *une droite fixe* D; 2° *la tangente passe par un point fixe* O, *situé à une distance* R *de* D. *Construire les deux roulettes fixe et mobile.*

$$OB = m,$$
$$\widehat{\omega OB} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$
$$\lambda = \operatorname{tang} \alpha.$$

Considérons les axes fixes xOy et les axes mobiles $\xi A \eta$ entraînés dans le mouvement. Les formules du changement des coordonnées rectangulaires sont

$$(o) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= (x - m)\cos 2\alpha - (y + R)\sin 2\alpha, \\ \eta &= (x - m)\sin 2\alpha + (y + R)\cos 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées (dans le système xOy) du centre instantané ω sont

$$X = m; \qquad Y = m \cot 2\alpha;$$

avec

$$m = R \cot \alpha,$$

d'où

$$X = \frac{R}{\lambda}, \qquad Y = \frac{R(1 - \lambda^2)}{2\lambda^2},$$
$$X^2 = 2R\left(y + \frac{1}{2}R\right).$$

La roulette fixe est cette parabole (axe Oy; foyer en O; paramètre égal à R).

Remplaçons dans les formules (o) x et y par X et Y; il viendra

$$\xi = -\frac{R}{\lambda}, \qquad \eta = \frac{R(1 - \lambda^2)}{2\lambda^2},$$
$$\xi^2 = 2R\left(\eta + \frac{1}{2}R\right). \text{ (Roulette mobile.)}$$

Le mouvement est donc produit par une parabole qui roule sur une parabole fixe égale. Le lecteur achèvera la discussion géométrique assez intéressante.