Nouvelles annales de mathématiques

GODEFROY

Sur les intégrales de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 205-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__205_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[E5]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

PAR M. GODEFROY,
Bibliothécaire universitaire.

Les méthodes que l'on donne dans tous les Ouvrages pour calculer les intégrales de Fresnel recourent à l'emploi des imaginaires et impliquent par là même la connaissance de la théorie de l'intégration d'une fonction d'une variable complexe, à moins de manquer de logique ou de rigueur. Cependant, par une légère modification de procédés connus (*voir* H. LAURENT, *Traité d'Analyse,* t. III, p. 137), on peut éviter l'introduction du nombre i; c'est la seule originalité de la démonstration suivante.

Si dans l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on fait le changement de variable $x = y\sqrt{t}$, on en tire

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ty^2}\,dy,$$

d'où, en multipliant les deux membres par $\sin t\,dt$, puis par $\cos t\,dt$ et intégrant par rapport à t de 0 à $l'\infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-ty^2}\sin t\,dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-ty^2}\cos t\,dt;$$

mais on sait que

$$\int_0^\infty e^{-ty^2}\sin t\,dt = \frac{1}{1+y^4}, \qquad \int_0^\infty e^{-ty^2}\cos t\,dt = \frac{y^2}{1+y^4};$$

par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4};$$

si dans la première de ces intégrales on change y en $\frac{1}{y}$, on obtient la seconde, on en conclut que les deux intégrales sont égales entre elles et, par suite, à leur demi-somme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy;$$

or

$$\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+y\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2-y\sqrt{2}+1},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{arc tang}\left(\frac{2y}{\sqrt{2}}+1\right) + \text{arc tang}\left(\frac{2y}{\sqrt{2}}-1\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

on a donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ou, en posant $x^2 = t$,

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$