NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KUSCOW

Sur la généralisation des théorèmes de Guldin

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 209-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__209_1>

[R 2b]

SUR LA GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE GULDIN;

PAR M. KUSCOW, à Saint-Pétersbourg.

Si nous avons dans l'espace un certain système de coordonnées curvilignes α, β, γ, la recherche des volumes des corps solides consiste à calculer la somme

$$V = \Sigma v_1,$$

où v_1 est un volume infiniment petit limité par six surfaces α, $\alpha + d\alpha$; β, $\beta + d\beta$; γ, $\gamma + d\gamma$,

$$v_1 = \frac{dS_1}{d\alpha}\,d\alpha\,\frac{dS_2}{d\beta}\,d\beta\,\frac{dS_3}{d\gamma}\,d\gamma\,\sin(S_1, S_2)\sin(S_3, S_1 S_2),$$

S_1 étant l'arc de la ligne d'intersection des surfaces des coordonnées qui sont déterminées par des paramètres β et γ; S_2 celui de la ligne d'intersection des surfaces α et γ; S_3 celui des surfaces α et β; (S_1, S_2) l'angle entre les lignes S_1 et S_2 dans le point M déterminé par les coordonnées α, β, γ; $(S_3, S_1 S_2)$ l'angle entre la ligne S_3 et le plan $S_1 M S_2$.

Si nous prenons la somme des divers v_1 qui correspondent aux différentes valeurs du paramètre α, comprises entre α_1 et α_2, nous obtiendrons le volume d'un corps compris entre les surfaces α_1 et α_2, β et $\beta + d\beta$, γ et $\gamma + d\gamma$; en nous proposant de calculer le volume du corps limité par une surface fermée déterminée par l'équation

$$\text{(I)} \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

nous remarquons que α_1 et α_2 doivent être deux racines consécutives de l'équation (I) en y considérant β et γ comme déterminés. Il est aisé de voir que si l'équation (I) représente une surface fermée, à chaque système de valeurs de β et γ correspondra un nombre pair de racines réelles. Dans ce cas, il faut prendre plusieurs sommes correspondant aux éléments de l'intérieur du volume.

La première intégration par rapport à α donne

$$\begin{aligned} v_2 = \Sigma_\alpha v_1 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dS_1}{d\alpha}\,d\alpha\,\frac{dS_2}{d\beta}\,d\beta\,\frac{dS_3}{d\gamma}\,d\gamma\,\sin(S_1, S_2)\sin(S_3, S_1 S_2) \\ &= \Phi_1(\beta, \gamma)\,d\beta\,d\gamma. \end{aligned}$$

Prenons la somme des divers v_2 qui correspondent aux différentes valeurs du paramètre β comprises entre β_1 et β_2, nous obtenons le volume d'une couche infiniment mince que découpent du corps les surfaces γ et $\gamma + d\gamma$; β_1 et β_2 étant déterminées comme deux racines consécutives de l'équation

$$\text{(II)} \qquad \Phi_1(\beta, \gamma) = 0$$

par rapport à β; il en résulte que l'équation (II) doit avoir un nombre pair de racines réelles par rapport à β.

Cette seconde intégration nous donne

$$v_3 = \Sigma_\beta v_2 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi_1(\beta, \gamma)\, d\rho\, d\gamma = \Phi_2(\gamma)\, d\gamma.$$

En intégrant enfin v_3 entre les limites γ_1 et γ_2 nous obtiendrons le volume du corps entier.

Les paramètres γ_1 et γ_2 sont déterminés par les surfaces γ tangentes au corps de deux côtés opposés; pour cela il faut que γ_1 et γ_2 soient deux racines consécutives de l'équation

$$\text{(III)} \qquad \Phi_2(\gamma) = 0.$$

On voit que l'équation (III) doit avoir un nombre pair de racines réelles

$$\begin{aligned} V &= \Sigma_\gamma v_3 = \Sigma_\gamma \Sigma_\beta v_2 = \Sigma_\gamma \Sigma_\beta \Sigma_\alpha v_1 \\ &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dS_1}{d\alpha}\, \frac{dS_2}{d\beta}\, \frac{dS_3}{d\gamma} \sin(S_1\, S_2) \sin(S_3 . S_1\, S_2)\, d\alpha. \end{aligned}$$

Le cas général de la cubature des volumes, comme nous voyons, se ramène à une intégration triple; mais quand nous savons *a priori* le volume v_2, nous aurons le volume entier par une intégration double. Dans le cas où le volume v_3 est donné comme une fonction déterminée de γ, le volume total sera obtenu par une intégration simple.

Le dernier cas de la cubature se présente ordinairement quand nous savons l'aire de la section du corps par des plans parallèles à un plan donné quelconque; alors nous pouvons égaler le volume de la couche au volume d'un cylindre qui a la même aire de base et une hauteur égale à la distance entre deux plans voisins; d'où

$$V = \int_{X_1}^{X_2} S\,dx,$$

S étant l'aire de la section et une fonction de x.

Voyons ce que nous aurons si nous prenons pour surfaces des coordonnées des plans menés par un axe quelconque, c'est-à-dire quand l'angle θ sera le paramètre γ.

Nous pouvons égaler le volume de la couche infiniment mince, que découpent dans le corps les plans θ et $\theta + d\theta$ à un cylindre droit coupé par un plan qui fait l'angle $d\theta$ avec le plan de la base.

Le volume d'un cylindre coupé par un plan est égal, comme nous savons, à S.H, où S est l'aire de la base et H la hauteur, correspondant à son centre de gravité.

Ainsi v_3, volume de la couche infiniment mince que découpent dans le corps les plans θ et $\theta + d\theta$, est égal à SK tang$(d\theta)$ ou à SK $d\theta$ (où S est l'aire de la section du solide par le plan θ, K la distance de son centre de gravité à l'axe OZ).

Comme nous l'avons déjà dit, S et K doivent être des fonctions de θ.

Nous avons donc

$$V = \Sigma_\gamma v_3 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Phi_2(\gamma)\,d\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} SK\,d\theta.$$

Nous remarquons que c'est une généralisation du théorème classique de Guldin, dans lequel $S = \text{const.}$, $K = \text{const.}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, d'où

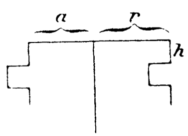
$$V = S\,2\pi K.$$

Appliquons cette formule aux cas suivants.

1. Nous avons une vis dont la hauteur égale H; la hauteur h du filet est égale au pas.

$$V = \pi H \frac{r^2 + a^2}{2}.$$

Fig. 1.

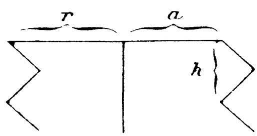


2. Nous avons une vis dont le filet est engendré par le mouvement d'un triangle isoscèle

$$V = \pi \frac{H}{3}(a^2 + ar + r^2).$$

Cette généralisation peut être faite aussi pour le second théorème de Guldin concernant les surfaces.

Fig. 2.



En effet, pour les coordonnées cylindriques, nous avons

$$S = \iint \frac{1}{\cos\nu} \rho \, d\theta \, d\rho,$$

où ν est l'angle entre la normale à un point quelconque et l'axe OZ. Si nous menons par l'axe OZ et par ce point M un plan, projetons sur ce plan la normale et indiquons par λ l'angle entre la normale et sa projection, et par μ l'angle entre la projection de la normale et l'axe OZ ; nous avons

$$\cos\nu = \cos\lambda \cos\mu,$$

puis

$$\frac{d\rho}{\cos\mu} = dl,$$

où l est l'arc de la section du corps par le plan mené par le point M et l'axe OZ.

Si l'angle λ n'est qu'une fonction de θ, nous aurons

$$s = \int \frac{d\theta}{\cos\lambda} \int dl\,\rho = \int l\mathrm{K} \frac{d\theta}{\cos\lambda},$$

où l est l'arc de la section et K la distance de son centre de gravité à l'axe OZ.

Si l'équation de la surface est $z = f(\rho, \theta)$, nous obtenons pour $\cos\lambda$ l'expression suivante

$$(\text{IV}) \qquad \cos\lambda = \rho \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}{\rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \rho^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}}.$$

Comme λ n'est qu'une fonction de θ, nous avons

$$\frac{d(\cos\lambda)}{d\rho} = 0$$

ou

$$(\text{V}) \qquad \rho^2 \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \psi^2(\theta),$$

où $\psi(\theta)$ est une fonction quelconque de θ.

En intégrant l'équation (V), nous obtenons

$$(\text{VI}) \qquad z = \sqrt{\alpha^2 - \rho^2} - \alpha \log \frac{\rho}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} - \alpha\psi(\theta) + \beta,$$

où α et β sont des constantes arbitraires. En y posant $\beta = \varphi(\alpha)$ et en éliminant α de l'équation (VI) et de l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0 = \log \frac{\rho}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}} - \psi(\theta) - \varphi'(\alpha),$$

nous obtenons deux genres les plus simples des surfaces qui satisfont à l'équation (V) :

1° Surfaces de rotation ;

2° Surfaces coniques.

Il est aisé d'obtenir le premier résultat au moyen de l'équation (IV) en y posant $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$; alors $\cos\lambda = 1$.

Si, dans les cas des surfaces coniques, nous indiquons par a l'angle entre l'axe OZ et la génératrice, nous obtenons

$$\cos\lambda = \frac{\cos a}{\sqrt{\cos^2 a + \left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)^2}}.$$