NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. FOUYÉ

Agrégation des sciences mathématiques (1896). Solution du problème de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 237-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__237_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1896). SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

PAR M. E. FOUYÉ,
Agrégé de Mathématiques.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A *dont la circonférence est dépolie.*

I. *Un point pesant* P *est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque* A, *dans le voisinage du point le plus haut du disque* A :

1° *On demande de déterminer l'angle minimum* α *que doit faire le rayon qui passe par le point* P *avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point* P *cesse d'être en équilibre;*

2° *Si le point* P *est placé sur le disque sans vitesse initiale, de manière que le rayon qui passe par le point* P *fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que* α, *le point* P *glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par* P, *lorsque ce point* P *se détache du disque pour tomber librement.*

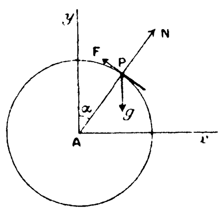
II. *Sur le disque circulaire* A, *dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant* B *qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque* A. *La circonférence de* B *est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre; on néglige la résistance au roulement. A l'origine, le disque* B *est sans vitesse et le rayon du disque* A *aboutissant au point de contact des deux* *disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu* β.

Entre quelles limites doit être compris β *pour que le disque* B *roule d'abord sans glisser sur le disque* A?

En admettant que le disque B *commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent : 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de* A *qui passe par le centre de* B *à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque* B *se détache de* A. *Dans les deux questions, on désignera par* f *le coefficient du frottement de glissement.*

I. 1° Prenons pour unité de masse la masse du point P; en ce point sont appliquées trois forces : le poids g, une force F tangente au cercle et une force

Fig. 1



normale N. Cherchons à quelles conditions le point P sera en équilibre. En projetant sur la tangente et sur la normale en P les trois forces énoncées précédemment, nous devons avoir

$$F = g \sin\alpha, \qquad N = g \cos\alpha,$$

la somme des moments des forces par rapport au point P est évidemment nulle; il ne reste plus qu'à écrire l'inégalité

$$F \leq fN \quad \text{ou} \quad \tan\alpha \leq f = \tan\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\alpha \leqq \varphi.$$

Donc, dès que l'on aura $\alpha > \varphi$, le point cessera d'être en équilibre.

2° Les équations du mouvement du point sont

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha - \mathrm{F}, \qquad \frac{v^2}{\rho} = g\cos\alpha - \mathrm{N}.$$

On a de plus

$$\mathrm{F} = f\mathrm{N}, \qquad v = \rho\alpha' \qquad (\rho, \text{ rayon du disque A}).$$

On peut donc écrire les équations du mouvement

$$\alpha'' = \frac{g}{\rho}\sin\alpha - \frac{f\mathrm{N}}{\rho}, \qquad \alpha'^2 = \frac{g}{\rho}\cos\alpha - \frac{\mathrm{N}}{\rho}.$$

On en déduit par l'élimination de N l'équation

$$\alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha'^2}{d\alpha} - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

et, en intégrant,

$$\alpha'^2 = \mathrm{C}e^{2f\alpha} + \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha].$$

Pour déterminer la constante C, remarquons qu'au début du mouvement, on a

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \alpha'_0 = 0.$$

donc

$$0 = \mathrm{C}e^{2f\alpha_0} + \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0].$$

On a donc

$$\alpha'^2 = \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}\Big\{(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha - [(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)}\Big\}.$$

Lorsque le point P se détachera du disque pour tomber librement, on aura

$$N = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations du mouvement,

$$\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}\cos\alpha.$$

L'équation demandée est donc

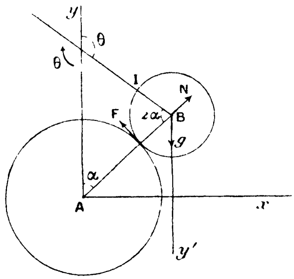
$$\frac{2}{1+4f^2}\left\{(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha \right.$$
$$\left. -[(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)}\right\} = \cos\alpha$$

ou

$$3\cos\alpha + 6f\sin\alpha + 2[(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)} = 0.$$

II. Soit ρ le rayon du disque B, celui du disque A sera 2ρ; prenons pour unité de masse la masse du

Fig. 2.



disque B; les équations du mouvement du centre (ξ, η) du disque B seront

$$\xi'' = -F\cos\alpha + N\sin\alpha, \qquad \eta'' = F\sin\alpha + N\cos\alpha - g.$$

On a

$$\xi = 3\rho\sin\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \xi'' = 3\rho(\cos\alpha\alpha'' - \sin\alpha\alpha'^2),$$
$$\eta = 3\rho\cos\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \eta'' = -3\rho(\sin\alpha\alpha'' + \cos\alpha\alpha'^2).$$

Les équations du mouvement pourront alors s'écrire

$$-\mathrm{F}\cos\alpha+\mathrm{N}\sin\alpha=3\rho(\cos\alpha\alpha''-\sin\alpha\alpha'^2),$$
$$\mathrm{F}\sin\alpha+\mathrm{N}\cos\alpha-g=-3\rho(\sin\alpha\alpha''+\cos\alpha\alpha'^2).$$

Multiplions-les par $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et ajoutons, puis par $-\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et ajoutons, nous aurons

$$(1)\qquad \mathrm{N}-g\cos\alpha=-3\rho\alpha'^2,$$
$$(2)\qquad \mathrm{F}-g\sin\alpha=-3\rho\alpha''.$$

Le théorème des moments, appliqué à l'axe perpendiculaire au plan du disque B et passant par son centre donne

$$\frac{\rho^2}{2}\theta''=\rho\mathrm{F}\qquad\text{ou}\qquad\rho\theta''=2\mathrm{F},$$

θ étant l'angle d'un rayon fixe BI du disque B avec une direction fixe, la verticale descendante. Si le disque B roule sur le disque A, en choisissant convenablement le rayon fixe BI, on aura

$$\theta=3\alpha,\qquad\text{d'où}\qquad\theta''=3\alpha'':$$

par suite, on a

$$(3)\qquad 3\rho\alpha''=2\mathrm{F}.$$

Éliminons F entre (2) et (3), on a

$$\alpha''=\frac{2g}{9\rho}\sin\alpha,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha'^2=\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2=\frac{4g}{9\rho}(\cos\beta-\cos\alpha)\qquad(\beta\text{ valeur initiale de }\alpha),$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,t=\int_\beta^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta-\cos\alpha}}.$$

De (2) et (3) on tire

$$(5)\qquad \mathrm{F}=\frac{g\sin\alpha}{3}.$$

Au début du mouvement, on a

$$\alpha = \beta, \qquad \alpha' = 0:$$

l'équation (1) donne

$$N = g \cos \beta,$$

et l'équation (5)

$$F = \frac{g \sin \beta}{3},$$

et, puisqu'il y a roulement, on a nécessairement

$$F \leqq f N,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} \beta \leqq 3f.$$

Donc β doit être compris entre ε et ω, ω étant tel que $\operatorname{tang} \omega = 3f$, et ε aussi petit que l'on veut, mais $\neq 0$; pour $\varepsilon = 0$, il y a équilibre.

Supposons β ainsi choisi; le mouvement du centre du disque B est alors donné par l'équation (4); on doit avoir

$$\cos \beta > \cos \alpha \qquad \text{ou} \qquad \alpha > \beta,$$

α va donc en augmentant, le radical doit être pris avec le signe $+$.

On a

$$N = g \cos \alpha - 3 \rho \alpha'^2 = \frac{g}{3}(7 \cos \alpha - 4 \cos \beta),$$

$$F = \frac{g \sin \alpha}{3};$$

α allant en augmentant, F augmente et N diminue; il arrivera un moment où l'on aura

$$F = f N,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \sin \alpha - f(7 \cos \alpha - 4 \cos \beta) = 0.$$

Pour $\alpha = \beta$, on a

$$\sin \beta - 3f \cos \beta < 0, \qquad \text{car} \qquad \operatorname{tang} \beta < 3f;$$

pour $\alpha = 90^\circ$, on a

$$1 + 4f\cos\beta > 0.$$

Donc l'équation (6) admet une racine β_1 comprise entre β et 90°.

Le roulement simple sans glissement cessera donc, dès que α atteindra la valeur β_1. A partir de ce moment, les équations du mouvement changent ; ce sont

$$N - g\cos\alpha = -3\rho\alpha'^2,$$
$$F - g\sin\alpha = -3\rho\alpha'',$$
$$\rho\theta'' = 2F \qquad \text{et} \qquad F = fN.$$

Éliminons N entre les deux premières, où l'on a remplacé F par fN, nous aurons

$$(7) \qquad \alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{g}{3\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

d'où

$$\alpha'^2 = Ce^{2f\alpha} + \frac{2g}{3\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha].$$

Pour déterminer la constante C, écrivons que pour $\alpha = \beta_1$

$$\alpha'^2 = \frac{4g}{9\rho}(\cos\beta - \cos\beta_1).$$

Nous aurons

$$\frac{4g}{9\rho}(\cos\beta - \cos\beta_1)$$
$$= Ce^{2f\beta_1} + \frac{2g}{3\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\beta_1 - 3f\sin\beta_1],$$

avec

$$\sin\beta_1 = f(7\cos\beta_1 - 4\cos\beta).$$

L'équation (7) montre que le centre du disque B se meut comme un point pesant placé sur un disque concentrique à A, de rayon 3ρ, la pesanteur et le coefficient de frottement restant les mêmes.

On a

$$\theta'' = \frac{2F}{\rho} = \frac{2fN}{\rho} = 2f\left(\frac{g}{\rho}\cos\alpha - 3\alpha'^2\right),$$

$$\theta'' = 6f\left[\frac{g}{\rho(1+4f^2)}(\cos\alpha + 2f\sin\alpha) - Ce^{2f\alpha}\right],$$

$$F = \frac{\rho\theta''}{2}, \qquad N = \frac{\rho\theta''}{2f}.$$

Le disque B quittera le disque A lorsque N s'annulera, c'est-à-dire lorsque θ'' s'annulera ; l'angle α correspondant sera donné par l'équation

$$\frac{g}{\rho(1+4f^2)}(\cos\alpha + 2f\sin\alpha) - Ce^{2f\alpha} = 0.$$