NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PADÉ

Note sur la formule $\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__312_1>

[D2c]

NOTE SUR LA FORMULE

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

PAR M. H. PADÉ.

Pour les valeurs réelles de x, la formule qui donne le développement en produit infini de $\sin x$ peut s'établir par une méthode plus simple que celles données ordinairement et qui peut encore être employée dans d'autres circonstances.

D'abord la convergence du produit infini résulte immédiatement de ce que, pour $(p+1)\pi > |x|$, dans les facteurs du produit

$$\left(1 - \frac{x^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(p+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{(p+i)^2\pi^2}\right)$$

sont positifs et plus petits que *un*, en sorte que, quand i augmente, ce produit, positif, diminue et tend par suite vers une limite.

Ceci posé, nous établirons d'abord ce lemme que, si a et b sont deux nombres positifs, $a < b$, la fonction $\frac{\tan g\, az}{\tan g\, bz}$ tend, quand z tend vers zéro, vers sa limite $\frac{a}{b}$ par des valeurs croissantes. La dérivée ne diffère, en effet, que par un facteur positif de la quantité

$$a \sin 2bz - b \sin 2az = -\tfrac{4}{3}ab(b^2 - a^2)z^3 + \ldots.$$

On conclut de là que *la fonction* $1 - \frac{\tang^2 \alpha z}{\tang^2 \beta z}$, $|\alpha| < |\beta|$, *tend vers sa limite* $1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ *par des valeurs décroissantes.*

Partons alors de la formule bien connue

$$\sin x = \cos^m \frac{x}{m}\, m \tang \frac{x}{m} \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{\pi}{m}}\right) \times \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{s\pi}{m}}\right),$$

où m désigne un nombre entier positif et s le nombre entier $\frac{m-2}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, selon que m est pair ou impair. En supposant $s\pi \geqq (p+1)\pi > |x|$, nous l'écrivons

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}\, m \tang \frac{x}{m} \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{p\pi}{m}}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{(p+1)\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\tang^2 \frac{x}{m}}{\tang^2 \frac{s\pi}{m}}\right). \end{aligned} \right.$$

Quand m croît, chaque facteur du second membre diminue; en outre, il s'introduit de nouveaux facteurs positifs et plus petits que *un;* le second membre diminue donc. Il est manifestement toujours supérieur à la valeur du produit infini

$$(\mathrm{P}) \qquad \left(1 - \frac{x^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(p+2)^2\pi^2}\right) \cdots;$$

il tend donc, lorsque m grandit indéfiniment, vers une limite *au moins égale* à la valeur de ce produit infini.

D'un autre côté, cette limite est au plus égale à la limite du produit des R premiers facteurs

$$\left(1-\frac{\tan^2\frac{x}{m}}{\tan^2\frac{(p+1)\pi}{m}}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{\tan^2\frac{x}{m}}{\tan^2\frac{(p+2)\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\tan^2\frac{x}{m}}{\tan^2\frac{(p+R)\pi}{m}}\right),$$

c'est-à-dire *au plus égale* au produit des R premiers facteurs de (P). Dans ces conditions, la limite est la valeur du produit (P).

Si l'on passe aussi à la limite dans le premier membre de (A), ce qui conduit à remplacer les deux premiers facteurs $\cos^m\frac{x}{m}$ et $m\tan\frac{x}{m}$ par 1 et x, et que l'on chasse le dénominateur, on obtient la formule qu'il s'agissait de démontrer.