Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 336-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__336_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1556

(1885, p. 535)

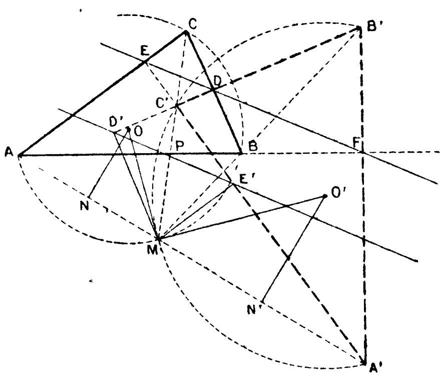
Les perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné ABC, *aux points où ils sont rencontrés par une transversale quelconque d, forment un nouveau triangle* A'B'C'.

Démontrer : que les droites AA', BB', CC' *se coupent en un même point* M *commun aux circonférences* ABC *et* A'B'C'; *que celles-ci sont orthogonales et que les droites de Simson du point* M, *par rapport aux deux triangles, sont parallèles à d.* NEUBERG.

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Le triangle A'B'C', formé par les perpendiculaires élevées sur les côtés du triangle ABC aux points E, D, F où ils sont rencontrés par la droite d, est évidemment semblable à ce



même triangle. De plus, ces deux triangles sont homologiques et les droites AA', BB', CC', qui joignent les sommets correspondants, concourent au centre d'homologie M. Cette propriété peut se démontrer ainsi.

Prenant le triangle ABC pour triangle de référence, les droites AD, BE auront pour équations

$$m\beta - n\gamma = 0, \qquad n\gamma - l\alpha = 0,$$

et la droite ED sera représentée par $m\beta - n\gamma + l\alpha = 0$. Une droite $m\beta - n\gamma - k\alpha = 0$ passant par le point D sera perpendiculaire à CB ou $\alpha = 0$, si $k = n\cos B - m\cos C$; la perpendiculaire B′C′ a donc pour équation

$$m\beta - n\gamma + (m\cos C - n\cos B)\alpha = 0.$$

De même, les perpendiculaires C′A′, B′A′ ont pour équations

$$n\gamma - l\alpha + (n\cos A - l\cos C)\beta = 0,$$
$$l\alpha + m\beta + (m\cos A + l\cos B)\gamma = 0.$$

On trouve ensuite que les droites AA′, BB′, CC′ sont représentées par

$$\beta(m + n\cos A - l\cos C) + \gamma(n + m\cos A + l\cos B) = 0,$$
$$\alpha(l - m\cos C + n\cos B) + \gamma(n + m\cos A + l\cos B) = 0,$$
$$\beta(m + n\cos A - l\cos C) - \alpha(l - m\cos C + n\cos B) = 0;$$

on voit donc qu'*elles sont concourantes*.

A l'aide de ces équations, on reconnaît que AA′ fait avec AB le même angle que CC′ avec CB, c'est-à-dire que $\widehat{MAB} = \widehat{BCM}$.

Le quadrilatère ACBM est donc inscriptible ; mais $\widehat{BMA'} = \widehat{ACB} = C'$, le quadrilatère A′B′C′M l'est aussi et les cercles circonscrits O, O′ aux triangles ABC, A′B′C′ ont un point commun M où ils se coupent orthogonalement. En effet, si l'on abaisse sur AA′ les perpendiculaires ON, O′N′, on a

$$\widehat{NOM} = \widehat{ACM} = \widehat{ECC'}, \qquad \widehat{MO'N'} = \widehat{MC'A'} = \widehat{CC'E},$$

donc

$$\widehat{NOM} = \widehat{MO'N'} = \widehat{ECC'} + \widehat{CC'E} = 1\,d,$$

et

$$\widehat{OMN} + \widehat{O'MN'} = \widehat{OMO'} = 1\,d.$$

Enfin, si du point M on abaisse, par exemple, des perpendiculaires MD′, ME′ sur les côtés C′B′, C′A′, les triangles MD′C′, ME′C′ seront semblables aux triangles CDC′, CEC′; donc les triangles D′C′E′, DC′E sont semblables et la droite D′E′ est parallèle à d.

Par un raisonnement analogue, on prouve que la droite de Simson, par rapport au triangle ABC, est aussi parallèle à ED.

Question 1584.

(1888, p. 447.)

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres qui tendent, en décroissant, vers zéro, et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ des nombres positifs, qui croissent toujours. Démontrer que, si la série

$$a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3((b_3 - b_2) + \ldots$$

est divergente, il en est de même de la série

$$(a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \ldots.$$

(E. Cesàro).

SOLUTION

Par M. A. Buhl.

Je vais démontrer que les deux séries

$$(1) \qquad a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \ldots,$$

$$(2) \qquad (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \ldots$$

sont divergentes en même temps; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ étant des nombres décroissant indéfiniment; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ étant des nombres positifs croissant indéfiniment; je pose

$$b_1 = \frac{m_1}{a_1}, \qquad b_2 = \frac{m_2}{a_2}, \qquad b_3 = \frac{m_3}{a_3}, \qquad \ldots,$$

$m_1, m_2, m_3, \ldots$ étant des constantes convenablement choisies.

La série (1) devient alors

$$(3) \quad m_1 + m_2 - \frac{a_2}{a_1} m_1 + m_3 - \frac{a_3}{a_2} m_2 + m_4 - \frac{a_4}{a_3} m_3 + \ldots.$$

Cette série est supposée divergente; si nous lui enlevons tous les termes négatifs, il restera la série

$$(4) \qquad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots,$$

divergente à plus forte raison.

Changeons maintenant l'ordre des termes de la série (3), de façon à l'écrire

$$(5) \quad \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) m_1 + \left(1 - \frac{a_3}{a_2}\right) m_2 + \left(1 - \frac{a_4}{a_3}\right) m_3 + \ldots.$$

D'après les hypothèses, les coefficients des termes de cette série sont tous *positifs et finis.*

Donc la série (5) peut être considérée comme formée par la série (4) dont les termes auraient été multipliés par des nombres différents mais finis.

(4) étant divergente, (5) l'est alors aussi. Or la série (5) n'est autre chose que la série (2). On s'en apercevra en remplaçant m_1, m_2, ... par $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... La démonstration est donc faite.

SOLUTION

Par M. J. FRANEL.

Désignons par S_n et Σ_n les sommes des n premiers termes dans les séries respectives

$$(1) \qquad a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \ldots,$$

$$(2) \qquad (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \ldots;$$

on aura

$$(3) \qquad \Sigma_n = S_n - a_{n+1} b_n = S_n - a_n b_n + b_n(a_n - a_{n+1}).$$

Si le produit $a_n b_n$ reste, pour toute valeur de n, inférieur à un nombre fixe A, la somme Σ_n, qui est $> S_n - a_n b_n$, augmentera indéfiniment avec n, puisque la série à termes positifs (1) est, par hypothèse, divergente, et le théorème est démontré.

Supposons maintenant que, quelque grand que soit A, il existe toujours une infinité de nombres n tels que $a_n b_n$ soit $>$ A. On a

$$\begin{aligned} \Sigma_{n+p} - \Sigma_n &= (a_{n+1} - a_{n+2}) b_{n+1} + \ldots + (a_{n+p} - a_{n+p+1}) b_{n+p} \\ &> b_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} - a_{n+p+1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \Sigma_{n+p} - \Sigma_n > b_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+p+1}).$$

Laissant n fixe, supposons que p devienne de plus en plus grand, a_{n+p+1} tendra vers o. On pourra donc, après avoir choisi une quantité positive ε quelconque, assigner un nombre P tel que, p étant $>$ P, $b_{n+1}\, a_{n+p+1}$, soit $< \varepsilon$. On aura donc, pour toutes les valeurs de $p >$ P,

$$(5) \qquad \Sigma_{n+p} > \Sigma_n + b_{n+1} a_{n+1} - \varepsilon.$$

Après avoir choisi un nombre A aussi grand qu'on le veut, on pourra, par hypothèse, déterminer n, de manière que $b_{n+1} a_{n+1}$ soit $> A$; ce nombre n étant fixé, on pourra ensuite assigner un nombre P tel que l'inégalité (5) soit satisfaite pour $p > P$. On voit donc que Σ_{n+p} finit par surpasser tout nombre donné d'avance, si grand qu'il soit. La série (2) est donc bien divergente. C. Q. F. D.

Nota. — Les deux solutions qui précèdent ont paru dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (p. 218-219; 1896).