NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RIPERT

Sur la discussion de l'équation des quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 413-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__413_1>

[L²1a]

SUR LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES QUADRIQUES (²);

PAR M. L. RIPERT,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit l'équation générale cartésienne

$$(\mathrm{Q})\left\{\begin{aligned} F(X, Y, Z, T) = {} & AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 \\ & + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY \\ & + 2CXT + 2C'YT + 2C''ZT + DT^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

En désignant par H le discriminant de la fonction F, par a, a', ..., c'', d les mineurs du premier ordre de H correspondant respectivement à A, A', ..., C'', D, et

(¹) Cette note est extraite du Chap. III, § 29 du Mémoire *Sur les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires*, publié en russe dans les *Mémoires scientifiques de l'Université de Kasan*, livres IV-IX. 1898.

(²) Comparer avec l'article *Sur la discussion de l'équation des coniques*. (*N. A.*, p. 329; 1898.)

notamment

$$a'' = AA'D + 2C'CB'' - AC'^2 - A'C^2 - DB''^2,$$
$$d = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

posant

$$\alpha = A'A'' - B^2, \qquad \alpha' = A''A - B'^2, \qquad \alpha'' = AA' - B''^2,$$
$$\beta = B'B'' - AB, \qquad \beta' = B''B - A'B', \qquad \beta'' = BB' - A''B'',$$

d'où résulte

$$H = Dd - (\Sigma\alpha C^2 - 2\Sigma\beta C'C''),$$

posant enfin

$$AD - C^2 = \theta, \qquad A'D - C'^2 = \theta', \qquad A''D - C''^2 = \theta'',$$

il est aisé de démontrer par la décomposition en carrés de la fonction F ou de vérifier directement les identités suivantes :

1° Dans l'hypothèse $A\alpha''d \neq 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z + (AC' - B''C)T]^2}{\alpha''} + \frac{A(dZ - c''T)^2}{d\alpha''} + \frac{AH}{d}T^2,$$

2° Dans l'hypothèse $A\alpha'' \neq 0$, $d = 0$, qui entraîne $H\alpha'' - c''^2 = 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z + (AC' - B''C)T]^2}{\alpha''} - 2\frac{Ac''}{\alpha''}ZT - \frac{Aa''}{\alpha''}T^2;$$

3° Dans l'hypothèse $A\alpha'' \neq 0$, $d = H = 0$, qui entraîne $c'' = 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z + (AC' - B''C)T]^2}{\alpha''} - \frac{Aa''}{\alpha''}T^2.$$

4° Dans l'hypothèse $A \neq 0$, $d = H = \alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$, $a'' \neq 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 - 2(AC' - B''C)YT - 2(AC'' - B'C)ZT + \theta T^2;$$

5° Enfin, dans l'hypothèse $A \neq 0$, avec

$$d = H = \alpha = \alpha' = \alpha'' = a = a' = a'' = 0$$

$$AF = \tfrac{1}{4} F_X'^2 + 0\, T^2.$$

Dès lors, il est facile, en faisant sur chaque forme d'équation les hypothèses qu'elle comporte, de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *L'espèce d'une quadrique donnée par l'équation (Q) et sa situation, tant par rapport au plan de l'infini qu'à l'origine, sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant* (1) :

I.	$Ad > 0,\ \alpha'' > 0$	$H > 0$	Quadrique imaginaire E_i.	
		$H = 0$	Point (quadrique se réduisant au pôle du plan de l'infini).	
		$H < 0$	Ellipsoïde réel E.	
II.	$Ad < 0,\ \alpha'' > 0$ / $d \neq 0,\ \alpha'' \leqq 0$	$H < 0$	Hyperboloïde à deux nappes H_2.	
		$H = 0$	Cône (quadrique passant par le pôle du plan de l'infini).	IV.
		$H > 0$	Hyperboloïde à une nappe H_1.	
III.	$d = 0$	$H < 0$	Paraboloïde elliptique P_e.	
		$H = 0$	(*Voir* le théor. 1 *bis* ci-après).	
		$H > 0$	Paraboloïde hyperbolique P_h.	

I. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une conique imaginaire.

II. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une conique réelle (ellipse dans le cas de α, α' *et* $\alpha'' > 0$, hyperbole ou parabole avec α, α' ou $\alpha'' \leqq 0$).

III. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant deux droites concourantes (imaginaires pour P_e, réelles

(1) On peut remplacer la combinaison $A\alpha''$ par l'une des suivantes : $A\alpha'$, $A'\alpha$, $A'\alpha''$, $A''\alpha$, $A''\alpha'$, à l'exclusion de $A\alpha$, $A'\alpha'$ ou $A''\alpha''$. D'ailleurs. I entraîne toujours A, A', A'' de mêmes signes et $\alpha, \alpha', \alpha''$ positifs. La combinaison ($Ad < 0$, $\alpha'' > 0$) n'est à considérer que lorsqu'on a en même temps $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$.

pour P_h), en d'autres termes, quadriques tangentes au plan de l'infini.

IV. L'origine est extérieure, sur la quadrique, ou intérieure selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0.$$

Le cône asymptote a pour équation

$$F(X, Y, Z, T) - \frac{H}{d} T^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = c, y = c', z = c''$, $t = d$. Le plan polaire de l'origine a pour équation

$$CX + C'Y + C''Z + DT = 0.$$

Toute quadrique ($H \neq 0$) a deux systèmes de génératrices rectilignes, imaginaires pour E, P_e, H_2 ($H < 0$), réels pour H_1 et P_h ($H > 0$).

Théorème 1 *bis*. — *Si l'on a* $d = H = 0$, *la quadrique* Q *est une variété cylindrique dont l'espèce et la situation sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :*

I.	$\alpha'' > 0$	$Aa'' > 0$		Cylindre imaginaire.	IV.
		$a'' = 0$		Droite (cylindre-point).	
		$Aa'' < 0$		Cylindre elliptique réel.	
II.	$\alpha'' < 0$	$a'' \neq 0$		Cylindre hyperbolique.	
		$a'' = 0$		Dièdre (cylindre-plans sécants).	
III.	$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$	a, a' ou $a'' \neq 0$		Cylindre parabolique.	
		$a = a' = a'' = 0$	θ, θ' ou $\theta'' > 0$	Plans parallèles imaginaires.	V.
			$\theta = \theta' = \theta'' = 0$	Plans parallèles confondus.	
			θ, θ' ou $\theta'' < 0$	Plans parallèles réels et distincts.	

I et II. Variétés respectives des paraboloïdes P_e et P_h, présentant les mêmes caractères de situation;

$\alpha'' = AA' - B''^2$ et $a'' = D\alpha'' + 2B''CC' - AC'^2 - A'C^2$ doivent se correspondre; si l'on a $\alpha'' = 0$, avec α ou $\alpha' \neq 0$, on opérera sur (α, a) ou (α', a'). La droite $(\alpha'' > 0,\ a'' = 0)$ est l'intersection de deux plans imaginaires conjugués.

III. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une droite double (toujours réelle) qui, pour le cylindre parabolique, est la droite centrale (génératrice à l'infini du cylindre).

IV. Les équations de la droite centrale sont, dans tous les cas, $F'_X = 0$, $F'_Y = 0$, $F'_Z = 0$, deux de ces équations entraînant la troisième. Tous les cylindres ont deux systèmes de génératrices rectilignes confondus en un seul (système double).

V. L'équation du plan central est $F'_X = 0$, $F'_Y = 0$ ou $F'_Z = 0$, ces trois équations étant identiques. Le système de génératrices rectilignes est indéterminé.

Théorème 2. — *La situation et l'espèce d'une quadrique donnée par son équation tangentielle*

$$(q) \qquad F(U,V,W,R) = \Sigma AU^2 + 2\Sigma BVW + 2\Sigma CUR + DR^2 = 0$$

sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :

I.	$Ad > 0$, $\alpha'' > 0$	$H > 0$	Quadrique imaginaire.	
		$H = 0$	Plan (quadrique se réduisant au plan polaire de l'origine).	
		$H < 0$	Quadrique réelle *non réglée*.	
II.	$Ad < 0$, $\alpha'' > 0$ / $d \neq 0$, $\alpha'' \leq 0$	$H < 0$	Id.	
		$H = 0$	Conique (quadrique située dans son plan polaire de l'origine).	IV.
		$H > 0$	Quadrique réelle *réglée*.	
III.	$d = 0$	$H < 0$	Quadrique réelle *non réglée* q_1.	
		$H = 0$	(*Voir* le théor. 2 *bis* ci-après).	
		$H > 0$	Quadrique réelle *réglée* q_2.	

I. Quadriques auxquelles on ne peut mener de l'origine (*intérieure*) qu'un cône circonscrit imaginaire.

II. Quadriques auxquelles on peut mener de l'origine (*extérieure*) un cône circonscrit réel.

III. Quadriques auxquelles on peut mener de l'origine (*sur la surface*) un cône circonscrit se réduisant au plan tangent.

IV. La quadrique est hyperboloïde, paraboloïde ou ellipsoïde, selon que l'on a

$$AD > o, \qquad D = o \qquad \text{ou} \qquad AD < o.$$

$H < o$ caractérisant toujours une quadrique non réglée (E, P_e, H_2) et $H > o$ une quadrique réglée (P_h ou H_1) (¹), E correspond à ($AD < o$, $H < o$), H_2 à ($AD > o$, $H < o$), H_1 à ($AD > o$, $H > o$), P_e à ($D = o$, $H < o$), P_h à ($D = o$, $H > o$). Le plan polaire de l'origine a pour coordonnées $u = c$, $v = c'$, $w = c''$, $r = d$. Il coupe la quadrique suivant la conique

$$F(U, V, W, R) - \frac{H}{d} R^2 = o.$$

L'équation du centre est

$$CU + C'V + C''W + DR = o.$$

Théorème 2 *bis*. — *Si l'on a $d = H = o$, la quadrique q se réduit à une conique située dans un plan passant par l'origine et dont la situation et l'espèce sont indiquées, sans exception, par le Tableau sui-*

(¹) Cette propriété importante, constante quel que soit le système de coordonnées, est la conséquence d'un fait géométrique : Une quadrique est toujours du même genre (réglée ou non réglée) que ses corrélatives et ses transformées homographiques.

vant :

I.	$\alpha'' > 0$	$Aa'' > 0$	Conique imaginaire.	IV.
		$a'' = 0$	Droite.	
		$Aa'' < 0$	Conique réelle.	
II.	$\alpha'' < 0$	$a'' \neq 0$	Conique réelle.	
		$a'' = 0$	Couple de points réels.	
III.	$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$	a, a' ou $a'' \neq 0$	Conique réelle q_3.	
		$a = a' = a'' = 0$; θ, θ' ou $\theta'' > 0$	Deux points imaginaires.	V.
		$a = a' = a'' = 0$; $\theta = \theta' = \theta'' = 0$	Deux points confondus.	
		$a = a' = a'' = 0$; θ, θ' ou $\theta'' < 0$	Deux points réels et distincts.	

I et II. Coniques (variétés respectives des quadriques q_1 et q_2) ne passant pas par l'origine, qui est seulement située dans leur plan. La droite ($\alpha'' > 0$, $a'' = 0$) est la jonction de deux points imaginaires conjugués.

III. Coniques passant par l'origine (ou ayant leur droite de jonction y passant). Dans la conique q_3, la tangente à l'origine est la corrélative de la droite centrale (génératrice à l'infini) du cylindre parabolique.

IV. La conique est hyperbole, parabole ou ellipse selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0.$$

La polaire de l'origine (corrélative de la droite centrale d'un cylindre) a pour équations :

$$F'_U = 0, \qquad F'_V = 0, \qquad F'_W = 0,$$

deux quelconques entraînant la troisième.

V. L'équation du *point central* est

$$F'_U = 0, \qquad F'_V = 0 \qquad \text{ou} \qquad F'_W = 0,$$

équations identiques. Le plan central d'un couple de plans parallèles étant le plan polaire d'un point quelconque du plan de l'infini, le *point central* d'un couple de points en ligne droite avec l'origine est le pôle d'un plan quelconque passant par l'origine.

Cas des coordonnées tétraédriques. — Supposons maintenant que l'équation ponctuelle (Q) soit établie en coordonnées *tétraédriques normales*, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ étant les équations respectives des faces a_1, a_2, a_3, a_4 du tétraèdre de référence $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Il est facile de voir alors, en se reportant au théorème 1, que [1] :

1° Les quadriques $(Ad > 0,\ \alpha'' > 0)$ coupent la face a_4 suivant une ellipse imaginaire; les quadriques $(Ad < 0,\ \alpha'' > 0)$ ou $(d \neq 0, \alpha'' \leqq 0)$ coupent cette face suivant une conique réelle; les quadriques $(d = 0)$ la coupent suivant deux droites concourantes (r ou i), ou, en d'autres termes, lui sont tangentes. Les cas (I et II), avec $H = 0$, correspondent à un point (pôle de a_4) ou a un cône ayant son sommet en ce point. La quadrique $(Ad > 0,\ \alpha'' > 0,\ H > 0)$ est imaginaire; dans tous les autres cas, $H > 0$ correspond à une quadrique réglée et $H < 0$ à une quadrique non réglée. Le sommet A_4 est extérieur, sur la quadrique, ou intérieur, selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0.$$

Les coordonnées du pôle de a_4 sont c, c', c'', d. Le cône circonscrit dont ce point est le sommet a pour équation

$$F(X, Y, Z, T) - \frac{H}{d} T^2 = 0.$$

Le plan polaire de A_4 a pour équation

$$CX + C'Y + C''Z + DT = 0.$$

Les résultats relatifs à (a_1, A_1), (a_2, A_2), (a_3, A_3) s'établissent de même, en remarquant que (A, A', A'', D) d'une part,

---

(1) Ces propriétés sont même évidentes, en vertu du principe d'homographie, dont les coordonnées (trilinéaires ou) tétraédriques sont l'instrument, comme les coordonnées tangentielles sont celui du principe de dualité.

(B, B', B'', C, C', C'') de l'autre, ont des significations identiques.

2° En posant

$$\Phi = aa_1^2 + a'a_2^2 + a''a_3^2 + 2ba_2a_3 + 2b'a_3a_1 + 2b''a_1a_2 + 2ca_1a_4 + 2c'a_2a_4 + 2c''a_3a_4 + da_4^2,$$

la quadrique Q est ellipsoïde, paraboloïde ou hyperboloïde, selon que l'on a

$$a\Phi > 0, \qquad \Phi = 0 \qquad \text{ou} \qquad a\Phi < 0,$$

a étant ici un quelconque des mineurs a, a', a'', d, avec $H < 0$ pour E, P_e, H_2 et $H > 0$ pour E_i, P_h, H_1. Les coordonnées du centre sont Φ'_{a_1}, Φ'_{a_2}, Φ'_{a_3}, Φ'_{a_4}.

L'équation $\Phi(U, V, W, R) = 0$ est l'équation tangentielle de $F(X, Y, Z, T) = 0$.

Remarque. — Les résultats (1°) sont indépendants du système (normal, barycentrique, etc.) des coordonnées tétraédriques. Les résultats (2°) en dépendent essentiellement, parce que l'équation du plan de l'infini est fonction de a_1, a_2, a_3, a_4. En coordonnées *barycentriques,* cette équation devenant $\Sigma X = 0$, il suffit de substituer à la fonction $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ la fonction plus simple $\Phi(1, 1, 1, 1)$. Les coordonnées du centre sont alors $\Phi'_{a_1=1}$, $\Phi'_{a_2=1}$, $\Phi'_{a_3=1}$, $\Phi'_{a_4=1}$.

Nous laisserons au lecteur le soin : 1° d'examiner le théorème 1 *bis*, en remarquant qu'à un cylindre (cône de sommet à l'infini) correspond un cône dont le sommet est dans le plan a_4, et que, à un couple de plans parallèles (se coupant suivant une droite de l'infini) correspond un couple de plans se coupant suivant une droite du plan a_4; 2° de faire la traduction corrélative des théorèmes 2 et 2 *bis*, en substituant l'équation (q) à l'équation (Q). La fonction ψ_1 à substituer à Φ pour la détermination de l'espèce et du centre, est alors

$$\Psi = \Sigma A a_1^2 + 2\Sigma B a_2 a_3 + 2\Sigma C a_1 a_4 + D a_4^2,$$

c'est-à-dire $F(a_1, a_2, a_3, a_4)$.
