Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1898

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 424-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__424_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1898.

Mathématiques élémentaires.

On considère un triangle T dont les sommets sont A, B, C et une droite Δ dans son plan. On prend les symétriques d'un point O quelconque de la droite Δ par rapport aux côtés du triangle T, et l'on construit le centre O′ du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus :

I. Trouver le lieu du point O′ lorsque le point O décrit la droite Δ. Ce lieu est une conique S dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite Δ par rapport au triangle T. On indiquera également les positions de Δ pour lesquelles S lui est tangente ;

II. Trouver le lieu du centre de la conique S lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même.

Ce lieu est une conique S_1 qui dépend de la direction de Δ;

III. Trouver le lieu du centre de S_1 lorsqu'on fait varier la direction de Δ;

IV. Démontrer que, par tout point I de S, on peut mener trois droites OO′ et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point I aux points de rencontre de Δ et de S;

V. Dans le cas particulier où la droite Δ passe par le centre ω d'un cercle inscrit au triangle T, on propose de trouver l'enveloppe de la droite OO′. Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle T et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés Δ et les côtés de T sont six points placés sur une même conique.

Mathématiques spéciales.

Au système des deux points M, M′, dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement (x, y, z) (x', y', z'), on en fait correspondre un troisième P de coordonnées (X, Y, Z) par les formules

$$X = xx', \qquad Y = yy' \qquad Z = zz'.$$

1° On suppose que les points M, M′ décrivent une même droite Δ issue d'un point $A(a, b, c)$ et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ.

On demande quels lieux décrit le point P quand M et M′ décrivent la droite Δ indépendamment l'un de l'autre, ou bien quand, l'un des points décrivant la droite Δ, l'autre reste fixe sur cette droite, ou bien, enfin, quand les deux points décrivent Δ, mais en restant confondus. Dire quelles relations existent entre ces divers lieux.

2° On suppose maintenant que les points M, M′ décrivent non plus une même droite, mais une même conique Ω, les coordonnées d'un point courant de cette conique Ω étant des fonctions rationnelles d'un paramètre λ,

$$x = \frac{a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}, \qquad y = \frac{b_2\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0},$$

$$z = \frac{c_2\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_0}{d_3\lambda^2 - 2d_1\lambda + d_0},$$

où les a, b, c, d sont des coefficients constants.

Lorsque M et M′ décrivent Ω indépendamment l'un de l'autre, le point P décrit une surface S ; ses coordonnées sont des fonctions rationnelles du second degré de deux paramètres convenablement choisis. Dire quel lieu décrit le point P sur la surface S quand, M′ restant fixe sur la conique Ω, le point M décrit seul cette conique. Dire ensuite quel lieu décrit le point P quand M et M′ décrivent Ω, mais en restant liés par une relation homographique involutive. Quelles conclusions peut-on tirer du résultat relativement aux coniques situées sur la surface S ?

3° Quelle est la nature de la correspondance qui relie les points M et M′ sur la conique Ω, quand le point P décrit une section plane de la surface S ? Étudier et interpréter les cas de décomposition.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0,$$

où a désigne une constante, et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° Former le système des équations différentielles des caractéristiques;

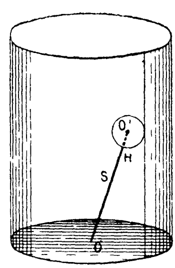
2° Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles;

3° Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée;

4° Dire à quoi doit se réduire la fonction $F(z)$ pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.

Mécanique rationnelle.

Un vase cylindrique, circulaire, droit, repose par le fond sur une table horizontale fixe. Le centre O de ce fond est lui-



même fixe, de sorte que le vase ne peut que tourner autour de la verticale du point O; on suppose d'ailleurs que ce mouvement de rotation a lieu sans frottement.

A l'intérieur du vase se trouve une tige OH, homogène et pesante, d'épaisseur constante infiniment petite, dont une extrémité est immobile au centre O, tandis qu'à l'autre extrémité H est fixée d'une manière invariable une sphère, aussi homogène et pesante, ayant son centre O' sur l'axe de la tige et s'appuyant contre la paroi interne du vase. Le corps solide S, constitué par la tige et la sphère, peut se mouvoir librement autour du point fixe O; mais on suppose que des frottements se développent au contact de ce corps avec la paroi interne du vase. On négligera les frottements de pivotement et de roulement, pour ne tenir compte que du frottement de glissement, dont le coefficient sera f.

A l'instant initial $t = 0$, le solide S est immobile et le vase est animé d'une vitesse de rotation ω_0 autour de la verticale ascendante du point O : trouver les mouvements du vase et du solide.

On désignera par R le rayon intérieur du vase, et par μ son moment d'inertie par rapport à son axe. On représentera par m la masse de la tige OH et par M celle de la sphère. On appellera $2a$ la longueur OO', que l'on supposera supérieure à R, et ρ le rayon $O'H$ de la sphère :

1° On trouvera d'abord les mouvements absolus du vase et du solide S dans le cas particulier où le rayon ρ de la sphère est nul;

2° On les obtiendra ensuite dans le cas général où ρ a une valeur quelconque moindre que R;

3° On discutera enfin le pivotement et le roulement du solide S sur le vase, et l'on écrira en particulier la condition nécessaire et suffisante pour que le roulement s'effectue constamment dans le même sens pendant toute la durée du mouvement. Négligeant ensuite la masse m de la tige et supposant invariable le rayon intérieur R du vase, on résumera la discussion précédente en la basant sur la valeur du rayon ρ de la sphère.