Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 477-483

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__477_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1673.

(1894, p. 4*.)

Par un point fixe situé sur une circonférence de cercle, on mène deux cordes rectangulaires. Sur chacune de ces cordes, comme diamètre, on décrit respectivement les cercles c, c'. Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles c, c' est une strophoïde droite.

(Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Lez.

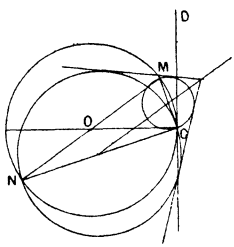
On sait que les coordonnées des centres de similitude de deux cercles

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=r'^2$$

sont données par les équations

$$(1)\qquad x=\frac{\alpha' r\mp\alpha r'}{r\mp r'},\qquad y=\frac{\beta' r\mp\beta r'}{r\mp r'}.$$

Or, soient O le centre du cercle de rayon $2R$ et C le point fixe de la circonférence.



Si l'on prend OC pour axe des X et une perpendiculaire CD pour axe des Y, le cercle O aura pour équation

$$(x+2R)^2+y^2=4R^2,\qquad \text{ou}\qquad x^2+y^2+4Rx=0,$$

et un diamètre mobile, $y = \operatorname{tang}\mu(x + 2R)$, rencontrera cette circonférence en deux points ayant pour coordonnées

$$\begin{array}{lll} M, & x = -2R(1 - \cos\mu), & y = 2R\sin\mu, \\ N, & x = -2R(1 + \cos\mu), & y = -2R\sin\mu. \end{array}$$

Par suite, les cercles c, c' décrits sur CM et CN comme diamètres, seront représentés par

$$(x + R - R\cos\mu)^2 + (y - R\sin\mu)^2 = 2R^2(1 - \cos\mu),$$
$$(x + R + R\cos\mu)^2 + (y + R\sin\mu)^2 = 2R^2(1 + \cos\mu).$$

Or, il s'agit de prouver que les points de rencontre de leurs tangentes communes, ou les centres de similitude, sont sur une strophoïde. Pour cela, remarquant qu'on peut écrire

$$\begin{array}{lll} \alpha = -R(1 - \cos\mu), & \beta = R\sin\mu, & r = R\sqrt{2(1 - \cos\mu)}, \\ \alpha' = -R(1 + \cos\mu), & \beta' = -R\sin\mu, & r' = R\sqrt{2(1 + \cos\mu)}, \end{array}$$

les équations (1) deviennent après réductions

$$x = \pm R\sin\mu, \qquad y = R\,\frac{\sin\mu}{\cos\mu}(1 \pm \sin\mu).$$

Éliminant la variable μ entre ces égalités, on obtient l'équation

$$(R - x)y^2 = (R + x)x^2$$

qui est celle d'une strophoïde droite ayant son point double à l'origine C.

Autre solution de M. J. Destoux.

Question 1697.

(1885, p. 38*.)

Étant donnés, sur une conique, deux groupes de trois points a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3, s'il existe une conique inscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et circonscrite au triangle $b_1b_2b_3$, il existe une seconde conique inscrite au triangle $b_1b_2b_3$ et circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$.

Étant donné un triangle, chaque point d'intersection du cercle circonscrit avec l'un des cercles inscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle.

(G. Humbert.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Les deux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $b_1 b_2 b_3$ étant inscrits dans la conique C, il existe une conique Σ pour laquelle les deux triangles sont conjugués.

S'il existe une conique qui soit inscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ et circonscrite au triangle $b_1 b_2 b_3$, il suffira de prendre sa polaire réciproque par rapport à Σ, elle sera inscrite au triangle $b_1 b_2 b_3$ et circonscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$.

Soient $a_1 a_2 a_3$ un triangle quelconque, A son cercle circonscrit, B un de ses cercles inscrits et représentons par b_1 un des points de coupe de ces deux circonférences, et par b_2, b_3 les ombilics du plan. Les deux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $b_1 b_2 b_3$ sont inscrits dans la conique A; en outre, la conique B est inscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ et circonscrite au triangle $b_1 b_2 b_3$. Il existe donc une conique C, circonscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ et tangente aux côtés du triangle $b_1 b_2 b_3$. La droite $b_2 b_3$ étant à l'infini, C est une parabole admettant b_1 comme foyer, puisque $b_1 b_2$ et $b_1 b_3$ sont les droites isotropes passant par b_1 et tangentes à C.

Question 1699.

(1895, p. 38*.)

On considère le quadrilatère formé par les quatre pieds des normales abaissées sur une ellipse d'un point du plan de cette ellipse. Les centres des quatre cercles circonscrits (cercles de Joachimsthal), *passant par trois des pieds des normales, ont pour centre des moyennes distances le point d'émission des normales.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soit $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse.

Les normales, abaissées du point $(\alpha\beta)$ sur l'ellipse, ont leurs pieds sur l'hyperbole d'Apollonius

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

Éliminons x entre ces deux équations; on trouve

$$c^4 y^4 + 2c^2 b^2 \beta y^3 + \ldots - b^6 \beta^2 = 0.$$

L'hyperbole coupe l'ellipse en quatre points dont les ordonnées sont y', y'', y''', y^{IV}; on aura donc

$$\Sigma y' = -\frac{2b^2\beta}{c^2},$$

et, de même,

$$\Sigma x' = \frac{2a^2\alpha}{c^2}.$$

Le cercle de Joachimsthal, passant par les points 2, 3 et 4, aura pour équation développée dans chaque ouvrage de Géométrie analytique

$$x^2 + y^2 + x\left(\frac{c^2 x'}{a^2} - \alpha\right) - y\left(\frac{c^2 y'}{b^2} + \beta\right)$$
$$- \frac{b^2}{a^2}x_1^2 - \frac{a^2}{b^2}y_1^2 - \alpha x' - \beta y' = 0,$$

d'où, pour les coordonnées de son centre,

$$X_1 = \frac{\alpha a^2 - c^2 x'}{2a^2}, \qquad Y_1 = \frac{c^2 y' + \beta b^2}{2b^2},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma X_1 = \frac{4\alpha a^2 - c^2 \Sigma x'}{2a^2} = \alpha, \qquad \Sigma Y_1 = \frac{c^2 y' + 4\beta b^2}{2b^2} = \beta.$$

On a donc, pour les coordonnées du centre des moyennes distances

$$x = \frac{\Sigma X_1}{4} = \frac{\alpha}{4},$$

de même

$$y = \frac{\beta}{4}.$$

Il y a donc une petite erreur dans l'énoncé. Le point cherché se trouve sur la droite qui joint le centre de l'ellipse au point d'émission des normales au quart à partir du centre.

Question 1703.

(1895, p. 38*.)

1° *Le lieu des centres des coniques osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence et passant par un autre point donné de la circonférence est une hyperbole équilatère.*

2° *Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence est un cercle.*

3° *Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence est un cercle.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Prenons pour axe des x la tangente au point donné de la circonférence de rayon R, et pour axe des y le diamètre passant par ce point.

Toute conique osculatrice à la circonférence à l'origine aura une équation de la forme

$$(\text{I}) \qquad x^2 + y^2 - 2Ry + \lambda y(y - mx) = 0.$$

1° On obtiendra le lieu cherché en éliminant la variable λ entre les dérivées partielles par rapport à x et à y, de l'équation générale des coniques. On trouve aisément

$$my^2 - mx^2 + 2xy - mRy = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère dont le centre se trouve sur la corde d'osculation au quart à partir de l'origine et qui est tangente à la circonférence donnée à l'origine.

3° On obtiendra toutes les hyperboles équilatères du système en faisant dans l'équation (I)

$$\lambda = -2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2mxy - 2Ry = 0.$$

En éliminant m entre les dérivées partielles de cette équation, par rapport à x et à y, on aura, pour le lieu des centres cherché,

$$y^2 + x^2 + Ry = 0,$$

équation d'un cercle.

La conique sera une parabole si $4(1+\lambda) = \lambda^2 m^2$.

2° De là, en posant $\lambda m = 2\varphi$, on a, pour l'équation des paraboles,

$$(x - \varphi y)^2 - 2Ry = 0.$$

Identifions cette équation avec l'équation aux foyers

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx + ny + p)^2.$$

En éliminant, entre les équations d'identification, les quantités m, n, p, φ, on trouve aisément pour le lieu des foyers

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\beta R}{2} = 0.$$

Ces trois questions se laissent traiter aussi par des considérations géométriques très élémentaires.

Question 1717.

(1896, p. 104.)

NOTE

Par M. G. Gallucci.

A propos de la question 1717.

Pour éclaircir une phrase obscure de l'énoncé de la question 1717 on peut modifier cet énoncé en disant :

Le lieu des milieux des cordes d'un cercle O *ayant une projection donnée* $2l$ *sur un diamètre fixe* D *est une quartique* (m); *discuter cette courbe. Le cercle* O *et deux points* P, Q *de la courbe* (m) *étant donnés, déterminer la position du diamètre* D, *la projection* $2l$ *et les autres points de la courbe* (m).

On arrive à la solution de la seconde partie de la question par des considérations élémentaires fort simples; la construction est la suivante :

On conduit les cordes KL, MN du cercle O qui ont leurs milieux en P, Q; le diamètre du cercle O, perpendiculaire à la droite qui joint les milieux de KM et LN, donne une solution ; le diamètre, perpendiculaire à la droite qui joint les milieux de KN et LM donne une autre solution. Et ce sont là les seules solutions.

A propos de la première partie de la question, on peut arriver très simplement à la construction de la tangente, indépendamment des théorèmes de MM. d'Ocagne et Godefroy, en partant de l'équation polaire de la courbe (m) qui est $\rho^2 + \dfrac{l^2}{\sin^2\omega} = r^2$ (numéro d'avril, p. 188).

En dérivant par rapport à ω, on a

$$\rho'\rho = \frac{l^2 \cos\omega}{\sin^3\omega} \qquad \text{ou bien} \qquad \rho'\rho \operatorname{tang}\omega = \frac{l^2}{\sin^2\omega},$$

ρ' étant la sous-normale au point m. Si d est le point où D coupe $\overline{ab}$, on a

$$\overline{md} = \rho \operatorname{tang}\omega \qquad \text{et} \qquad \overline{mb} = \frac{l^2}{\sin^2\omega},$$

d'où

$$\rho'\,\overline{md} = \overline{mb}^2.$$

Donc, si l'on porte sur md le segment $\overline{mc} = \rho'$, le point c est le conjugué harmonique de d par rapport à a, b. De là on déduit la construction de la normale et, par conséquent, de la tangente.

Cette construction coïncide avec celle qui a été trouvée par M. Mannheim.

Si l'on part de l'équation cartésienne de la courbe, on obtient une construction un peu moins simple, et c'est celle que j'avais envoyée à la Rédaction et qu'il ne vaut pas la peine de reproduire ici.