

## **Premier concours des « Nouvelles annales » pour 1899**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 17 (1898), p. 485-488

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1898\\_3\\_17\\_\\_485\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__485_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES »  
POUR 1899.**

**Sujet.**

*Soient deux formes binaires*

$$f = a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \dots,$$

$$\varphi = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} y + \alpha_2 x^{p-2} y^2 + \dots,$$

*dont la première seule, pour plus de commodité, est écrite avec les coefficients du binôme, et dont la seconde a un degré  $p$  égal ou inférieur à  $m$ . Le  $p^{\text{ième}}$  composé, c'est-à-dire la fonction obtenue en appliquant à  $f$  l'opération symbolique*

$$\varphi \left( \frac{\partial}{\partial y}, - \frac{\partial}{\partial x} \right) = \alpha_0 \frac{\partial^p}{\partial y^p} - \alpha_1 \frac{\partial^p}{\partial y^{p-1} \partial x} + \dots,$$

*est un invariant simultané qui se réduit à la  $p^{\text{ième}}$  polaire du système  $(x_1, y_1)$  par rapport à  $f$  lorsque  $\varphi$  est égal à la puissance  $p^{\text{ième}}$  de  $xy_1 - yx_1$ .*

*Dans le cas général, lorsque cet invariant est nul identiquement, nous dirons, avec Rosanes, Reye, Sturm, Meyer, etc., que la forme  $\varphi$  est apolaire par rapport à  $f$ . On propose de démontrer les propriétés suivantes des formes apolaires par rapport à une ou plusieurs formes binaires :*

*1° La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme donnée  $f$ , d'ordre  $m$ , se ramène à la somme de  $p$  puissances  $m^{\text{ièmes}}$  ( $p \leq m$ ), sous la*

forme

$$(1) \quad \begin{cases} f = \Lambda_1(x_1 - yx_1)^m + \Lambda_2(x_2 - yx_2)^m + \dots \\ \quad + \Lambda_n(xy_p - yx_p)^m, \end{cases}$$

est qu'il existe une forme  $\varphi$  apolaire par rapport à  $f$  et égale au produit

$$(2) \quad \varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \dots (xy_p - yx_p),$$

lorsque l'on connaît une forme  $\varphi$  apolaire par rapport à  $f$  et possédant des racines multiples, sous quelle forme canonique analogue à (1) peut-on mettre  $f$ ?

2<sup>o</sup> Quel est l'ordre minimum des formes  $\varphi$  apolaires par rapport à une forme donnée  $f$ , d'ordre  $m$ , dont les coefficients ne sont soumis à aucune restriction; qu'en conclut-on relativement à la réduction de  $f$  à la forme (1); quelles relations doivent exister entre les coefficients de cette forme pour que l'ordre minimum de  $\varphi$  soit abaissé? Exemples relatifs aux formes des deuxième, troisième et quatrième degrés;

Dans le cas de  $p = m$ , si  $\varphi$  est apolaire par rapport à  $f$ ,  $f$  est réciproquement apolaire par rapport à  $\varphi$ ; quelles sont les formes apolaires par rapport à elles-mêmes?

Étant donné un système de  $q$  formes  $f$ , d'ordre  $m$ , linéairement indépendantes, montrer qu'il existe un système de  $m - q + 1$  formes  $\varphi$  du même ordre, apolaires par rapport aux premières, que ces systèmes sont conjugués et que les déterminants fonctionnels formés l'un avec les dérivées d'ordre  $q - 1$  des formes  $f$ , l'autre avec les deri-

vées d'ordre  $m - q$  des formes  $\varphi$ , ne diffèrent que par un facteur constant. Quelles conclusions peut-on tirer de là relativement à une réduction simultanée des formes considérées à une forme canonique, d'abord dans le cas de  $q = m$ , ensuite dans le cas de  $q < m$ ?

Généraliser les résultats précédents au cas où l'on considère les formes  $\varphi$ , d'ordre  $p < m$ , apolaires au système des  $q$  formes  $f$ .

#### Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

- 1° A un crédit de 100<sup>fr</sup> d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de M. Gauthier-Villars ;
- 2° A la publication du Mémoire ;
- 3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 MAI 1899, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 mai et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mé-

moires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1<sup>er</sup> juillet 1899, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1<sup>o</sup> De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2<sup>o</sup> De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

---