

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 48-52

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__48_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1539.

(1885, p. 392.)

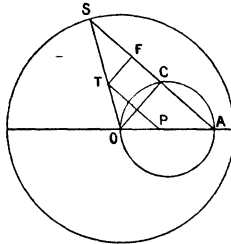
Le lieu des foyers des sections faites, dans un ellipsoïde de révolution aplati par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution, est une podaire d'ellipse. (FOURET.)

SOLUTION

Par M. E. BALLY.

Proposons-nous d'abord le problème suivant :

On donne un cercle de centre O , un point A , et le cercle de diamètre OA . On joint le point A à un point mobile S de la



première circonférence, AS coupe la seconde en C : lieu du point F qui partage le segment CS dans un rapport constant.

Joignons OC , OS ; la perpendiculaire en F à AS coupe OS en T , menons TP parallèle à AS . On a

$$\frac{CF}{CS} = \frac{OT}{OS} = \frac{OP}{OA}.$$

Le rapport $\frac{CF}{CS}$ étant constant, le point T décrit un cercle de centre O , et le point P est fixe. TF enveloppe la conique anti-podaire de ce cercle par rapport au point P , et le point F décrit la podaire de cette conique relative au point A .

Cette conique est d'ailleurs une ellipse, une hyperbole ou un système de deux points suivant que l'on a $OP < OT$, $OP > OT$, $OP = OT$; ou, à cause de l'égalité des deux derniers rapports, $OA < OS$, $OA > OS$, $OA = OS$. Le lieu est donc une podaire d'ellipse, d'hyperbole, ou un système de deux cercles tangents au point A aux cercles donnés, suivant que le point A est intérieur, extérieur à la première circonférence, ou situé sur elle.

On s'assure aisément que toute podaire de conique à centre, relative à un point de l'axe focal de cette conique, peut être ainsi définie.

Considérons maintenant la quadrique engendrée par la révolution d'une conique à centre autour de l'axe non focal (ellipsoïde aplati ou hyperboloïde à une nappe). Les sections considérées sont semblables, chacune l'étant à la section méridienne qui lui est parallèle.

Figurons le cercle équatorial de centre O, décrit par les sommets de l'axe focal de la méridienne : les foyers réels des sections sont dans le plan de ce cercle.

Soit A la trace sur ce plan de la droite donnée : le lieu du centre des sections est le cercle de diamètre OA (lieu des milieux des cordes du cercle équatorial qui passent en A); le lieu de leurs sommets est le cercle équatorial. Or, C et S étant le centre et un sommet d'une section, et F le foyer voisin de S, le rapport $\frac{CF}{CS}$ est constant et égal à l'excentricité de la méridienne. On est donc ramené au problème précédent.

Suivant que la droite coupe, ne coupe pas ou touche l'ellipsoïde, on a une podaire d'ellipse, d'hyperbole ou un système de deux cercles.

Autre solution par M. DUCEY.

Question 1540.

(1888, p. 372.)

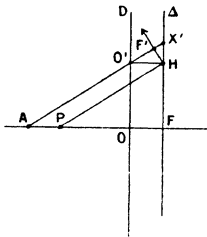
Le lieu des foyers des sections faites, dans un cylindre parabolique, par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal est une podaire de parabole.

(FOURET.)

SOLUTION

Par M. E. BALLY.

Soit, dans le plan diamétral principal, A la trace de la droite donnée, OD la génératrice principale, AO la trace du plan



perpendiculaire à OD mené par A, Δ la parallèle à OD menée par le foyer F de la parabole de section.

Soit F' le foyer d'une section d'axe AO'. Les ordonnées qui correspondent dans les deux paraboles aux points d'abscisses OF et O'X' respectivement, étant égales, on a :

$$\overline{OF}^2 = \overline{O'F'} \cdot \overline{O'X'}.$$

Menons O'H parallèle à OF; on aura

$$\overline{OH}^2 = \overline{O'F'} \cdot \overline{O'X'},$$

ce qui montre que F' est la projection de H sur AO'. La parallèle à AO' menée par H passe en un point fixe P, tel que $\overline{AP} = \overline{OF}$. La droite HF' enveloppe donc la parabole antipodaire de Δ relative à P, et le point F' décrit la podaire de cette parabole relative à A.

Si la droite est tangente au cylindre, le lieu est le cercle de diamètre OF.

Question 1749.

(1896, p. 488.)

On sait que le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère ABCD, dont les diagonales se coupent en O, est le barycentre des cinq points A, B, C, D et O affectés des coefficients 1, 1, 1, 1, -1.

On a aussi la proposition que voici :

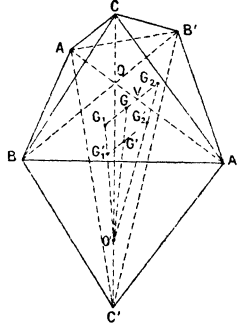
Le centre de gravité d'un octaèdre dont les diagonales

AA', BB', CC' concourent en un point O est le barycentre des points A, A', B, B', C, C', O affectés des coefficients $1, 1, \dots, 1, -2$. (FONTENÉ).

SOLUTION

Par M. E. BRAND.

Considérons $ABA'B'$ comme base commune de deux pyramides quadrangulaires; soit G le centre de gravité de l'aire du quadrilatère, son coefficient sera 3.



Portons sur $C'C$ la longueur $C'O'$ égale à CO et affectons les points C, C' et O des coefficients $1, 1, -1$.

Les deux points C et C' avec les coefficients $1, 1$ pourront être remplacés par les points O et O' avec les mêmes coefficients. Ce qui conduira à chercher le barycentre des points O' et G affectés des coefficients 1 et 3 . Ce barycentre sera en G' sur $O'G$ et au quart de la distance à partir de G .

La proposition est démontrée si G' est le centre de gravité du solide considéré.

Or, on peut prouver d'abord, après Lhuilier (*Annales de Gergonne*, 1812-1813), que, si l'on a un solide composé de deux pyramides triangulaires possédant une base commune, en prenant le point O de percée de la droite CC' avec la base ABA' , puis le point O' tel que $C'O' = CO$, le centre de gravité du solide sera sur $O'G_1$ et au quart à partir de G_1 (G_1 étant le centre de gravité de la base). En effet, soit $4p$ la masse du tétraèdre $C'ABA'$ et $4q$ celle du tétraèdre $C'ABA'$, on aura $CO : OC' = C'O' : O'C = p : q$.

A la masse $4p$, on substitue les quatre masses p aux sommets C, A, B, A' ; à la masse $4q$, on substitue les quatre masses q aux sommets C', A, B, A' . Les trois masses $p + q$

des sommets A, B, A' peuvent être remplacées par une masse $3(p+q)$ en G_1 ; les masses p et q en C et C' peuvent être remplacées par la masse $(p+q)$ en O'. Donc, finalement, on peut remplacer toutes les masses par une seule en G'_1 située sur $O'G_1$ et au quart à partir de G_1 . Donc, G'_1 est le centre de gravité du solide CABA'C'.

Cette proposition est encore vraie si la base commune des deux pyramides est un quadrilatère ABA'B'. En le décomposant en deux triangles et appelant G_2 le centre de gravité du triangle AA'B', le centre de gravité du solide CAA'B'C' sera en G'_2 situé sur $O'G_2$ et au quart à partir de G_2 .

Le centre de gravité G' du solide total CABA'B'C' sera sur $G'_1G'_2$ en un point G' , tel que l'on ait

$$\frac{G'_1G'}{G'_2G'} = \frac{\text{vol. CAB'A'C'}}{\text{vol. CABA'C'}} = \frac{B'O}{BO} = \frac{G_2V}{G_1V} = \frac{G_1G}{G_2G}$$

(O étant le point de concours des diagonales du quadrilatère, V le point de rencontre de G_1G_2 avec AA' et G étant tel que $G_1V = GG_2$).

Il est facile de voir que G est le centre de gravité du quadrilatère ABA'B', et à cause de

$$\frac{G'_1G'}{G'_2G'} = \frac{G_1G}{G_2G},$$

on conclut que G' est sur $O'G$ et au quart à partir de G.

Cette proposition de Lhuillier est vraie, que les diagonales se coupent ou ne se coupent pas en un même point.