NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LACOUR

Réduction à la forme canonique des formules qui donnent, en fonction rationnelle de deux paramètres, les coordonnées d’un point de la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 499-503

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__499_1>

[$M^2 4b$]

RÉDUCTION A LA FORME CANONIQUE DES FORMULES QUI DONNENT, EN FONCTION RATIONNELLE DE DEUX PARAMÈTRES, LES COORDONNÉES D'UN POINT DE LA SURFACE DE STEINER;

PAR M. E. LACOUR,

Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

---

1. Considérons la surface (S) définie par les formules

$$X = \varphi_1(x, y, z), \qquad Y = \varphi_2(x, y, z), \qquad Z = \varphi_3(x, y, z),$$
$$T = \varphi_4(x, y, z),$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 désignent des polynomes entiers et homogènes du second degré en x, y, z, entre lesquels il n'existe pas de relation linéaire identique, et regardons x, y, z comme les coordonnées trilinéaires d'un point m pris dans un plan auxiliaire (Π).

La surface (S) est représentée sur le plan (Π), et les sections planes de cette surface ont pour images les coniques du système linéaire

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} & U\varphi_1(x, y, z) + V\varphi_2(x, y, z) \\ & \qquad + W\varphi_3(x, y, z) + H\varphi_4(x, y, z) = 0. \end{aligned} \right.$$

En écartant les cas où, dans la situation relative des coniques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0,$$

se présenteraient des particularités qui seront précisées dans la suite, nous allons démontrer qu'on peut choisir le triangle de référence dans le plan (Π), et le tétraèdre auquel est rapportée la surface (S), de façon que les formules définissant cette surface puissent se ramener à la forme

$$X = 2yz, \qquad Y = 2zx, \qquad Z = 2xy, \qquad T = x^2 + y^2 + z^2.$$

2. *Les coniques* (C) *du système linéaire sont les coniques harmoniquement circonscrites aux coniques d'un faisceau tangentiel*

$$(\Gamma) \qquad \psi_1(u, v, w) + \lambda\psi_2(u, v, w) = 0,$$

qu'il est facile de déterminer en exprimant qu'une conique donnée par son équation tangentielle est harmoniquement inscrite à chacune des coniques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0.$$

Les coniques (Γ) du faisceau tangentiel sont les coniques inscrites dans un quadrilatère *abcd*; trois d'entre elles se décomposent en deux points, savoir : *a* et *c*, *b* et *d*, *e* et *f*, et l'on peut avoir les droites joignant les deux points d'un même couple en résolvant une équation du troisième degré.

3. *Il existe dans le système linéaire des coniques* (C), *images des sections planes de* (S), *quatre coniques réduites chacune à une droite double.*

En effet, une conique (C) est harmoniquement circonscrite à la conique formée des deux points *b* et *d* et, par suite, (C) divise harmoniquement les deux segments *ac* et *bd*; si la conique (C) se réduit à une droite double, cette droite double ne peut être que l'un des côtés du quadrilatère *abcd* compté deux fois, et réciproquement un des côtés du quadrilatère compté deux fois forme une conique harmoniquement circonscrite à l'ensemble des deux points a et c d'une part, et à l'ensemble des deux points b et d d'autre part.

Ceci nous conduit à prendre comme triangle de référence dans le plan (Π) le triangle formé par les diagonales du quadrilatère $abcd$, de sorte que les côtés du quadrilatère ont pour équations

$$x-y-z=0, \qquad -x+y-z=0,$$
$$-x-y+z=0, \qquad x+y+z=0.$$

D'après ce que nous avons vu sur les droites doubles du système linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{U}\varphi_1(x,y,z)+\mathrm{V}\varphi_2(x,y,z)& \\ +\mathrm{W}\varphi_3(x,y,z)+\mathrm{H}\varphi_4(x,y,z)&=0, \end{aligned}$$

on pourra déterminer des constantes telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}'\varphi_1+\mathrm{V}'\varphi_2+\mathrm{W}'\varphi_3+\mathrm{H}'\varphi_4&=(x-y-z)^2,\\
\mathrm{U}''\varphi_1+\mathrm{V}''\varphi_2+\mathrm{W}''\varphi_3+\mathrm{H}''\varphi_4&=(-x+y-z)^2,\\
\mathrm{U}'''\varphi_1+\mathrm{V}'''\varphi_2+\mathrm{W}'''\varphi_3+\mathrm{H}'''\varphi_4&=(-x-y+z)^2,\\
\mathrm{U}^{(\mathrm{iv})}\varphi_1+\mathrm{V}^{(\mathrm{iv})}\varphi_2+\mathrm{W}^{(\mathrm{iv})}\varphi_3+\mathrm{H}^{(\mathrm{iv})}\varphi_4&=(x+y+z)^2,
\end{aligned}$$

et si l'on fait le changement de coordonnées défini par les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_1&=\mathrm{U}^{(1)}\mathrm{X}+\mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y}+\mathrm{W}^{(1)}\mathrm{Z}+\mathrm{H}^{(1)}\mathrm{T},\\
\mathrm{Y}_1&=\mathrm{U}^{(2)}\mathrm{X}+\mathrm{V}^{(2)}\mathrm{Y}+\mathrm{W}^{(2)}\mathrm{Z}+\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{T},\\
\mathrm{Z}_1&=\mathrm{U}^{(3)}\mathrm{X}+\mathrm{V}^{(3)}\mathrm{Y}+\mathrm{W}^{(3)}\mathrm{Z}+\mathrm{H}^{(3)}\mathrm{T},\\
\mathrm{T}_1&=\mathrm{U}^{(4)}\mathrm{X}+\mathrm{V}^{(4)}\mathrm{Y}+\mathrm{W}^{(4)}\mathrm{Z}+\mathrm{H}^{(4)}\mathrm{T},
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{X}_1}&=x-y-z,\\
\sqrt{\mathrm{Y}_1}&=-x+y-z,\\
\sqrt{\mathrm{Z}_1}&=-x-y+z,\\
\sqrt{\mathrm{T}_1}&=x+y+z.
\end{aligned}$$

4. On déduit de là, pour l'équation de la surface (S) dans le nouveau système de coordonnées,

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{Y_1} + \sqrt{Z_1} + \sqrt{T_1} = 0.$$

C'est une des formes simples de l'équation de la surface de Steiner.

Pour obtenir les expressions des coordonnées d'un point de la surface annoncées au commencement, il suffit de faire le changement de coordonnées défini par les formules

$$\begin{aligned} 4X' &= X_1 - Y_1 - Z_1 + T_1, \\ 4Y' &= -X_1 + Y_1 - Z_1 + T_1, \\ 4Z' &= -X_1 - Y_1 + Z_1 + T_1, \\ 4T' &= X_1 + Y_1 + Z_1 + T_1. \end{aligned}$$

En remplaçant X_1, Y_1, Z_1, T_1 par leurs valeurs en fonction de x, y, z, on trouve

$$\begin{aligned} 4X' &= (x - y - z)^2 - (x + y - z)^2 \\ &\quad - (-x - y + z)^2 + (x + y + z)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 4T' &= (x - y - z)^2 + (-x + y - z)^2 \\ &\quad + (-x - y + z)^2 + (x + y + z)^2, \end{aligned}$$

ou enfin

$$X' = 2yz, \qquad Y' = 2zx, \qquad Z' = 2xy, \qquad T' = x^2 + y^2 + z^2.$$

Remarque. — La démonstration précédente a été faite en supposant que les tangentes communes aux coniques du faisceau tangentiel

$$\psi_1(u, v, w) + \lambda\psi_2(u, v, w) = 0$$

forment un quadrilatère proprement dit, c'est-à-dire que l'équation en λ qui détermine les coniques décomposées en deux points a ses racines distinctes.

Les formules finales doivent être modifiées, par exemple si deux côtés opposés de ce quadrilatère sont confondus.

Le degré de la surface (S) s'abaisse quand les coniques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0$$

ont un ou deux points communs. Dans ce cas, l'une au moins des coniques (Γ) se compose d'un point compté deux fois. L'équation en λ du faisceau tangentiel n'a pas ses racines distinctes.

Pour une discussion des cas singuliers que nous avons écartés, on pourra se reporter à un Mémoire de Clebsch sur la surface de Steiner (*Journal de Crelle*, t. 67, p. 1-22), où se trouve indiquée la réduction exposée ici, et auquel nous avons voulu surtout renvoyer le lecteur.