PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1898. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 522-529

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__522_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1898.
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère une sphère (S) *de rayon* R, *qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires* $Oxyz$; *et un paraboloïde* (P) *qui a pour plan directeur* xOy, *et pour directrices:* 1° *l'axe* Oz; 2° *la droite* AB *définie par les points* A *et* B *dont les coordonnées* x, y, z *sont respectivement* (R, O, R) *et* (a, b, c).

I. *Former les équations de la sphère et du paraboloïde.*

II. *On prend un point* M *sur* Oz, *et les plans polaires* [Σ] *et* [Π] *de ce point par rapport aux surfaces* (S) *et* (P). *Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans quand* M *décrit* Oz : *déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde* (P).

III. *En supposant* AB *à* 45° *sur* Oz *et tangente à la sphère* (S) *au point* B, *dans le trièdre* $Oxyz$, *calculer les coordonnées* a, b, c *du point* B *en fonction de* R : *déterminer les génératrices du paraboloïde* (P′) *qui sont tangentes à la sphère* (S) : *calculer le nombre de centièmes de la cote* c *du point* B, *quand* R *est égal à* 1.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. L'équation de la sphère S est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un point de la droite AB a pour coordonnées

$$x = \frac{R + \lambda a}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{\lambda b}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{R + \lambda c}{1 + \lambda}.$$

Une droite horizontale passant par ce point et rencontrant Oz a pour équations

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda b}{R + \lambda a}, \qquad z = \frac{R + \lambda c}{1 + \lambda}.$$

L'élimination de λ entre ces deux équations donne celle du paraboloïde P.

$$(\text{P}) \qquad z[bx + y(R - a)] - R[bx + y(c - a)] = 0.$$

II. Soit (o, o, h) le point M. Ses plans polaires Σ et Π par rapport à S et P ont pour équations

$$(\Sigma) \qquad zh - R^2 = 0,$$

$$(\Pi) \qquad h[bx + y(R - a)] - R[bx + y(c - a)] = 0.$$

Le lieu de l'intersection de ces deux plans, obtenu par élimination de h, est donc

$$(\text{Q}) \qquad R[bx + y(R - a)] - z[bx + y(c - a)] = 0.$$

C'est un paraboloïde hyperbolique Q, passant aussi par Oz et ayant aussi le plan Oxy comme plan directeur. Le reste de l'intersection comprendra donc deux génératrices parallèles à ce plan.

Or, on remarque immédiatement que l'on passe de l'équation (P) à l'équation (Q) par le simple changement de z en $\frac{R^2}{z}$. Les génératrices horizontales communes seront donc celles pour lesquelles

$$z^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad z = \pm R,$$

c'est-à-dire celles qui se trouvent dans les plans tangents à la sphère en ses points de rencontre avec Oz.

Cette double substitution faite dans l'une des équations (P) ou (Q) donne les équations de ces deux génératrices

$$\begin{cases} z = R \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = -R, \\ (2a - R - c)y - 2bx = 0. \end{cases}$$

III. Si la droite AB est tangente en B à la sphère, les coordonnées a, b, c de ce point B satisfont à l'équation de S et à celle du plan polaire de A par rapport à S, ce qui donne

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \tag{1}$$

$$a + c = R. \tag{2}$$

En outre, l'angle de AB et de Oz étant égal à $45°$, dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\frac{c - R}{\pm\sqrt{(a - R)^2 + b^2 + (c - R)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ou, en tenant compte de (1) et (2),

$$\frac{c - R}{R} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

De là, en remarquant que, si le point B est réel, on a $c < R$,

$$c = R\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

L'équation (2) donne alors

$$a = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

et l'équation (1), en remarquant que, le point B étant à l'intérieur de $Oxyz$, son y est positif

$$b = R\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Remplaçant tout de suite, dans l'expression de c, $\sqrt{2}$ par sa valeur $1,4142$, on a, pour $R = 1$,

$$c = \frac{0,4142}{1,41} = 0,29.$$

Les génératrices de P tangentes à S sont celles dont la distance à O est égale à R. Pour les génératrices parallèles à xOy, que nous appellerons du *premier système,* leurs équations étant de la forme

$$z = \lambda,$$
$$y = \mu x,$$

leur distance d à l'origine est donnée par

$$d = \lambda.$$

Celles qui sont tangentes à S sont donc telles que

$$\lambda = \pm R.$$

On retrouve ainsi les deux génératrices communes à P et à Q.

L'équation (P) donne immédiatement, pour une génératrice du second système, les équations

$$bx + y(R - a) = \lambda R,$$
$$bx + y(c - a) = \lambda z,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{x - \frac{\lambda R}{b}}{a - R} = \frac{y}{b} = \frac{z - R}{\frac{(c - R)b}{\lambda}}.$$

La distance de cette génératrice à l'origine est donc donnée par

$$d^2 = \frac{\lambda^2 R^2 + R^2(c-a)^2 + b^2 R^2}{(a-R)^2 + b^2 + \frac{(c-R)^2 b^2}{\lambda^2}}.$$

Écrivant que cette distance d est égale à R, chassant le dénominateur et réduisant, on a

$$\lambda^4 + \lambda^2[(c-a)^2 - (a-R)^2] - (c-R)^2 b^2 = 0,$$

ou

$$\lambda^4 + \lambda^2[c^2 - R^2 + 2a(R-c)] - (c-R)^2 b^2 = 0,$$

ou encore, en tenant compte de (1) et (2),

$$\lambda^4 + \lambda^2(a^2 - b^2) - a^2 b^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 + a^2) = 0.$$

Cette équation n'a pour racines réelles que

$$\lambda = \pm b,$$

qui donnent la droite AB, ce qui était évident *a priori*, et sa symétrique par rapport à Oz.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

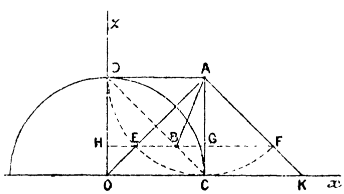
II. Le plan Σ et le plan Π pivotent, l'un autour de la droite à l'infini du plan xOy, l'autre autour de Oz, attendu que le point M étant sur le paraboloïde P, son plan polaire n'est autre que le plan tangent en M à ce paraboloïde, qui contient la génératrice Oz. En outre, ces plans, qui sont polaires d'un même point par rapport à deux quadriques, se correspondent homographiquement. Le lieu de leur intersection est donc, d'après un théorème bien connu de Chasles, une quadrique réglée. Et comme, par construction, les génératrices de cette quadrique rencontrent Oz (contenu dans le plan Π) et la droite à l'infini de xOy (contenue dans le plan Σ), ce ne peut être qu'un paraboloïde hyperbolique.

Le plan Π contient, outre Oz, la seconde génératrice du paraboloïde passant en M, c'est-à-dire la droite menée par M parallèlement à xOy et rencontrant AB en un certain point H. L'intersection du plan Π et du plan Σ est donc la parallèle NK à MH menée par le point N où ce plan Σ coupe Oz (¹).

Pour que cette génératrice NK de Q soit sur P, il faut qu'elle rencontre AB, ce qui ne peut être qu'autant qu'elle se confond avec MH, c'est-à-dire que le point N se confond avec le point M. Cette circonstance ne se produit que lorsque le point M coïncide avec un des deux points de rencontre de Oz avec la sphère S.

III. Considérons une projection de la figure sur le plan zOx.

Fig. 1.



La droite AB est à l'intersection de deux cônes équilatères de sommet A, l'un ACD circonscrit à la sphère, l'autre AOK à axe vertical.

La sphère de centre A et de rayon R coupe ces cônes suivant les cercles projetés suivant les droites CD et EF, dont la rencontre donne la projection du point B, attendu que le cercle CD est sur la sphère S.

(¹) Les points M et N étant conjugués par rapport à la sphère, et la normale en M au paraboloïde P, perpendiculaire en M au plan Π étant orthogonale à la droite NK, qui est parallèle à MH, cette normale et NK sont deux droites conjuguées par rapport à la sphère. Il résulte de là que le paraboloïde Q est polaire réciproque, par rapport à la sphère S, du paraboloïde des normales au paraboloïde P le long de la génératrice Oz.

On a, dès lors,

$$a = \mathrm{HB} = \mathrm{EG} = \mathrm{EA} \cos 45^\circ = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}},$$

$$c = \mathrm{OH} = \mathrm{OE} \cos 45^\circ = (\mathrm{OA} - \mathrm{EA}) \cos 45^\circ = \frac{\mathrm{R}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}},$$

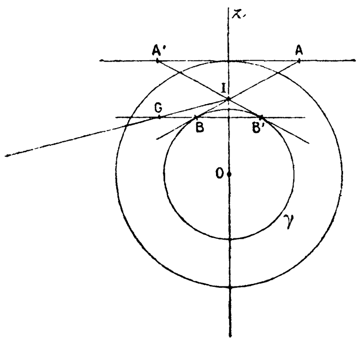
et, dans le cercle projeté suivant CD,

$$a = \sqrt{\mathrm{BD}.\mathrm{CB}} = \sqrt{\mathrm{EA}.\mathrm{OE}} = \sqrt{\mathrm{EA}(\mathrm{OA}-\mathrm{EA})} = \mathrm{R}\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Les génératrices du premier système rencontrant Oz et étant perpendiculaires à ce diamètre de la sphère S ne peuvent être tangentes à cette sphère que lorsqu'elles passent par les points où ce diamètre perce cette sphère.

Dans le second système, on a comme génératrice tangente à S la droite AB par définition. La symétrique de AB par rapport à Oz, diamètre de S, est également

Fig. 2.



tangente à cette sphère, et, comme elle rencontre les perpendiculaires à Oz, menées par les divers points de AB, c'est-à-dire les génératrices du premier système de P, elle est aussi une génératrice du second système de ce paraboloïde.

Pour voir s'il peut exister d'autres génératrices de ce système tangentes à la sphère, faisons une projection sur le second plan directeur du paraboloïde, c'est-à-dire sur le plan mené par Oz parallèlement à AB, et appelons γ la projection commune des petits cercles de la sphère contenus dans les plans de front de AB et A′B′. La droite projetée au point I étant une génératrice du premier système, toutes les génératrices du second passeront en projection par ce point I.

Si la projection d'une de ces génératrices est intérieure à l'angle BIB′, cette génératrice rencontre la génératrice BB′ en un point situé entre B et B′, c'est-à-dire à l'intérieur de la sphère.

Si la projection est extérieure à l'angle BIB′, comme IG, par exemple, la génératrice correspondante rencontre BB′ à l'extérieur de la sphère, en dehors des plans de front de AB et A′B′; donc, le rayon du petit cercle de la sphère contenu dans le plan de front de cette génératrice est inférieur à celui de γ; par suite, la génératrice IG, extérieure au cercle γ, ne peut être tangente à ce petit cercle.

Il résulte de là que les seules génératrices du second système tangentes à S sont AB et A′B′.