NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Sur le calcul des racines des équations par approximations successives

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 534-539

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__534_1>

[A3g]

SUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

On sait depuis longtemps que la substitution uniforme (x, fx) répétée indéfiniment peut converger vers une racine α de l'équation $x = fx$, pourvu que x soit pris dans un domaine convenable au voisinage du point-racine α et que fx soit holomorphe en ce point. Cette méthode employée dans certains cas par Euler, Legendre, Galois est sans doute beaucoup plus ancienne; c'est une des méthodes les plus simples d'approximations successives. Ce qu'il est beaucoup plus difficile de déterminer c'est le domaine dans lequel on peut prendre la valeur initiale; la question n'est pas encore complètement résolue. Quoiqu'il en soit ce domaine existe et l'on sait que :

1° Si le module de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$ est plus petit que 1 la substitution directe (x, fx) converge vers α;

2° Si ce module est plus grand que 1, la substitution inverse $(x, f^{-1}x)$ converge vers α;

3° Si le module de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$ est égal à 1 et si l'argument de cette dérivée est $\frac{2K\pi}{n}$ (K et n premiers entre eux), il y a n secteurs de convergence par la substitution directe, et n secteurs de convergence par la substitution inverse; ces secteurs alternent entre eux ([1]); l'on convient, quand on effectue la substitution inverse, de ne prendre parmi les diverses déterminations de $f^{-1}x$ que celle qui est contenue dans le domaine de α.

Galois a donné pour résoudre les équations algébriques une méthode d'approximations successives par les substitutions uniformes ([2]), dans laquelle on n'a jamais à faire que des opérations *rationnelles;* en ce qui concerne les équations quelconques, on peut, dans le même ordre d'idées, se proposer de calculer les racines: — *en n'effectuant que des opérations directes,* en appelant ainsi celles qui entrent dans la construction du premier membre de l'équation proposée; on n'aura jamais ainsi à faire la substitution inverse $(x, f^{-1}x)$ — *en rendant la convergence plus rapide.* La méthode suivante permet d'y parvenir; pour plus de simplicité je me borne au cas où la racine α est réelle; dans ce cas, si l'on a

$$0 < \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha < 1,$$

([1]) *C. R.*, 16 novembre 1896 et 30 juin 1897. *N. A.*, juillet 1897, février 1898,

([2]) Galois, *Œuvres mathématiques.*

la substitution directe converge vers α, par des valeurs croissantes, si l'on prend $x < \alpha$, par des valeurs décroissantes si l'on prend $x > \alpha$.

Si l'on a

$$-1 < \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha < 0,$$

la substitution directe converge vers α par des valeurs alternativement plus grandes et plus petites.

Dans les deux cas la convergence est très lente si la dérivée en α est voisine de 1 ou de -1; plus rapide si cette dérivée est voisine de 0.

Soit à résoudre l'équation

$$F(x) = 0;$$

posons

$$F(x) + x = fx,$$

on est ramené à

$$(1) \qquad fx = x.$$

Pour obtenir une convergence assez rapide par une substitution directe quelle que soit $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$, il suffit de remplacer la fonction fx par une autre $\varphi(x)$ telle que l'équation $\varphi(x) = x$ admette la même racine α et que $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\alpha$ soit aussi voisine de 0 que possible.

Soient α_1 et α_2 deux valeurs approchées de la racine α de (1); l'une par excès, l'autre par défaut, et β_1, β_2 les valeurs de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_{\alpha_1}$ et de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_{\alpha_2}$; soit k la moyenne $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$; cette moyenne est une valeur approchée de

$$K = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha.$$

Cela posé considérons l'équation

$$\varphi(x) = x + h(x - fx),$$

où h est indéterminé.

Pour $x = \alpha$, on a

$$\varphi(\alpha) = \alpha,$$

puisque $x - fx$ devient nul; elle admet donc la même racine α.

On a

$$\frac{d\,\varphi(x)}{dx} = 1 + h\left(1 - \frac{dfx}{dx}\right),$$

et

$$\left(\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right)_\alpha = 1 + h(1 - \mathrm{K}).$$

Si l'on connaissait K, on déterminerait h de manière que cette expression fût nulle; elle sera assez voisine de o, si l'on fait

$$h = \frac{1}{k-1},$$

et la substitution directe $x, \varphi x$, c'est-à-dire

$$x, \quad x + \frac{1}{k-1}(x - fx),$$

converge vers α.

Soit à résoudre

$$(\sqrt{2})^x = x.$$

Cette équation admet les deux racines réelles 2 et 4; on a

$$\left(\frac{dfx}{dx}\right)_2 < 1, \qquad \left(\frac{dfx}{dx}\right)_4 > 1.$$

Soient 1,7 et 2,2 deux valeurs approchées de la première; en partant de 1,7, la substitution x, fx nous donne

$$fx = \mathrm{F}(1,7) = \sqrt{2}^{1,7} = 1,8025\ldots,$$

$$f^2x = \sqrt{2}^{1,8025} = 1,8678\ldots,$$

$$f^3x = \sqrt{2}^{1,8678} = 1,9104\ldots,$$

$$f^4x = \sqrt{2}^{1,9104} = 1,9390\ldots.$$

. . . .

Appliquons maintenant la méthode permettant d'obtenir une convergence plus rapide. On a

$$\beta_1 = \sqrt{2}^{-1,7}\frac{L2}{2} = 0,6246\ldots, \qquad \beta_2 = \sqrt{2}^{-2,2}\frac{L2}{2} = 0,7428\ldots,$$

$$k = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 0,6817,$$

d'où

$$\frac{1}{1-k} = 3,161.$$

On aura à faire la substitution

$$x, \quad x + 3,161 \times (fx - x).$$

En partant de la même valeur $x = 1,7$, on a

$$\varphi(x) = 1,7 + 3,161(1,8025 - 1,7) = 2,024,$$

$$\varphi^2(x) = 2,024 + 3,161\left(\sqrt{2}^{2,024} - 2,024\right) = 1,9927.$$

....

Ainsi, tandis que (x, fx) nous donne après quatre substitutions 1,939 avec une erreur plus grande que 0,04, $(x, \varphi x)$ nous donne après deux substitutions seulement 1,9927 avec une erreur plus petite que 0,01; il est vrai qu'alors les substitutions sont un peu plus longues à calculer ([1]).

Cette méthode est moins convergente que celle de Newton comme le font ressortir les deux figures suivantes; la *fig.* 1 représente la méthode ci-dessus exposée, la *fig.* 2 représente celle de Newton appliquée au cas qui nous occupe. Dans le premier cas, nous menons par les points successivement obtenus $M_1, M_2, \ldots$, des parallèles à OX, ayant par suite un seul point commun avec la courbe $y = fx$; dans le second nous menons

---

([1]) Cette augmentation de calculs est indépendante du coefficient angulaire, tandis que la lenteur de la convergence de (x, fx) en dépend.

des tangentes à cette courbe, ayant deux points communs avec elle. Plus généralement, comme l'a remarqué M. Laisant (2), on pourrait faire passer par ces points des

Fig. 1.

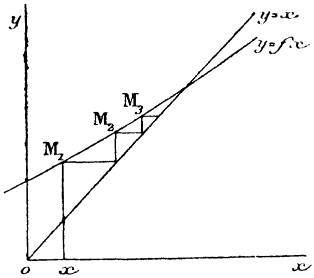
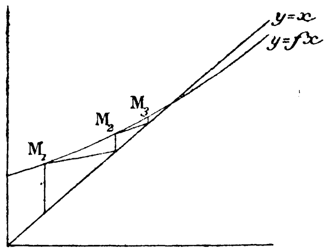


Fig. 2.



courbes ayant avec fx un contact d'ordre plus élevé, et la convergence serait d'autant plus rapide ; mais alors les calculs sont plus compliqués pour chaque substitution ; et il est bien difficile de dire *a priori* quelle que soit la nature de l'équation, laquelle de ces méthodes permettrait d'arriver à une valeur approchée avec un minimum de calculs à effectuer au total. Nous n'avons pas eu d'ailleurs l'intention de proposer une nouvelle méthode d'approximation, mais seulement de montrer qu'il en existe d'assez convergentes n'exigeant que des opérations *directes*.