NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HURWITZ

Sur les formes arithmétiques linéaires à coefficients réels quelconques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 64-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__64_1>

[I12b]

SUR LES FORMES ARITHMÉTIQUES LINÉAIRES A COEFFICIENTS RÉELS QUELCONQUES;

PAR M. A. HURWITZ.

Göttinger Nachrichten, 1897. Cahier XV.

Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.

M. Minkowski, dans son Livre *Geometrie der Zahlen* (1), a énoncé et démontré le théorème suivant, remarquable tant par son caractère élémentaire que par les nombreuses applications qu'il comporte :

Dans n formes linéaires homogènes entières à n variables, à coefficients réels quelconques et de déterminant Δ différent de zéro, on peut toujours donner aux variables des valeurs numériques entières qui ne soient pas toutes nulles et telles que chacune des formes ait une valeur absolue

$$\leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}.$$

(1) H. MINKOWSKI, *Géometrie des nombres*, p. 104; Leipzig, 1896. Relativement aux applications du théorème à la théorie des formes quadratiques et à la théorie des corps de nombres algébriques, comparez § 14-47 du Livre précité, et ensuite le Mémoire de M. Minkowski, *Sur les formes quadratiques positives et les algorithmes analogues aux fractions continues* (*Journal de Crelle*, t. 107, p. 278 et suiv.), et le Compte rendu présenté par M. Hilbert à la Deutsche Mathematiker Vereinigung : *la Théorie des corps de nombres algébriques*, théorèmes 42-47 et théorème 50.

M. Minkowski m'a communiqué une démonstration purement arithmétique de ce théorème, due à M. Hilbert, et qui sera reproduite dans le second fascicule de la *Géométrie des nombres*. Inspiré par cette Communication, j'ai trouvé une nouvelle démonstration, reposant sur des principes analogues, où l'on emploie des méthodes auxiliaires très simples, et qui se recommande par son peu de longueur. J'expose cette démonstration dans les pages suivantes.

I

Soient

$$(1) \qquad f_i = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \ldots + a_{ni}u_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n formes linéaires à coefficients numériques entiers des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Le déterminant de ces formes, dont la valeur absolue sera désignée par

$$(2) \qquad \text{abs}\,|a_{ki}| = \text{D},$$

sera, par hypothèse, différent de zéro.

Conformément aux définitions de Kronecker, deux formes linéaires φ, ψ à coefficients numériques entiers des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seront dites congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire satisferont à la formule

$$(3) \qquad \varphi \equiv \psi \qquad (\text{mod}\, f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

lorsque la différence $\varphi - \psi$ est représentable sous la forme

$$(4) \qquad \varphi - \psi = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des nombres entiers. Au cas contraire, φ et ψ sont dites incongrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Maintenant le point essentiel sur lequel repose la démonstration que nous allons exposer est le théorème suivant :

Le nombre des formes linéaires incongrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est égal à D.

Ce théorème a déjà été démontré différemment sous une autre forme ([1]). Néanmoins, pour éviter les lacunes, nous l'établirons ici rapidement.

Si l'on désigne par k un des nombres 1, 2, ..., n, la congruence

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \ldots + \delta_{k,n} u_n \equiv 0 \\ \qquad (\operatorname{mod} f_1, f_2, \ldots, f_n), \end{cases}$$

où les nombres entiers δ_k, $\delta_{k,k+1}$, $\delta_{k,n}$ doivent être regardés comme les inconnues, possède des solutions où δ_k est un nombre positif (qui n'est pas nul). En effet, on a évidemment

$$\mathrm{D}u_k \equiv 0 (\operatorname{mod} f_1, f_2, \ldots f_n).$$

Parmi les solutions de (5), choisissons-en une où δ_k soit positif et le plus petit possible, et posons alors

$$(6)\qquad g_k = \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \ldots + \delta_{k,n} u_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si φ est une forme linéaire quelconque à coefficients numériques entiers, on peut choisir les nombres t_1, $t_2, \ldots, t_n$ tels que la forme

$$(7)\qquad \varphi - t_1 g_1 - t_2 g_2 - \ldots - t_n g_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

satisfasse aux conditions

$$(8)\qquad 0 \leqq c_1 < \delta_1, \qquad 0 \leqq c_2 < \delta_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq c_n < \delta_n.$$

([1]) Comparez, par exemple, Frobenius : *Théorie des formes linéaires à coefficients entiers* (*Journal de Crelle*, t. 86, p. 174 et suiv.).

Ensuite deux formes différentes

$$(9) \qquad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

satisfaisant à ces conditions ne peuvent pas être congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$, car, en les retranchant l'une de l'autre, on obtiendrait une forme dont l'existence est exclue par le mode même de détermination des formes g_k.

De là résulte que chaque forme linéaire φ est congrue à une seule et unique des $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ formes (9) qui sont caractérisées par les inégalités (8). En particulier, chaque forme congrue à zéro pour les modules f_1, $f_2, \ldots, f_n$ est représentable sous la forme

$$t_1 g_1 + t_2 g_2 + \ldots + t_n g_n,$$

d'où il résulte que non seulement les formes g_1, $g_2, \ldots, g_n$ peuvent être exprimées sous la forme de fonctions linéaires homogènes à coefficients numériques entiers des formes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, mais encore que la réciproque [1] est vraie. Par conséquent, les valeurs absolues des déterminants des deux systèmes de formes sont identiques et, par suite, le nombre $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ des formes linéaires incongrues pour les modules f_1, $f_2, \ldots, f_n$ est égal à D.

II.

Soit $r+1$ le premier nombre entier qui surpasse $\sqrt[n]{D}$, en sorte que l'on ait

$$(1) \qquad r^n \leq D < (r+1)^n.$$

Parmi les $(r+1)^n$ formes

$$(2) \qquad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n,$$

---

[1] Par la réciproque, nous entendons les mêmes quatre dernières lignes du texte où l'on remplacera g par f et f par g. L. L.

qui sont caractérisées par les inégalités

$$(3) \qquad 0 \leqq c_1 \leqq r, \qquad 0 \leqq c_2 \leqq r, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq c_n \leqq r,$$

il en existe alors certainement deux différentes, qui sont congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$. La forme

$$(4) \qquad y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n,$$

que l'on obtient en retranchant l'une de l'autre deux pareilles formes, a ses coefficients compris entre $-r$ et $+r$, et, par conséquent, ceux-ci sont en valeur absolue $\leqq \sqrt[n]{D}$. Enfin, cette forme est représentable sous la forme

$$(5) \quad y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des nombres qui ne sont pas tous nuls. En comparant les coefficients de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans l'équation (5), on reconnaît que :

Si

$$(6) \qquad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont **n** *formes linéaires à coefficients numériques entiers des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de déterminant différent de zéro et égal en valeur absolue à* D, *on peut toujours donner aux variables des valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles, telles que chacune des formes ait une valeur absolue $\leqq \sqrt[n]{D}$.*

Comme on le reconnaît, c'est là le théorème de Minkowski pour les formes à coefficients numériques *entiers*.

III.

Soient maintenant

$$(1) \qquad r_{i1} x_1 + r_{i2} x_2 + \ldots + r_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n formes linéaires à coefficients rationnels. La valeur absolue de leur déterminant Δ est supposée différente de zéro. Choisissons le nombre entier positif g tel que les formes

$$(2) \quad g(r_{i1}x_1 + r_{i2}x_2 + \ldots + r_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

aient des coefficients numériques entiers. Puisque la valeur absolue du déterminant de ces formes est $g^n\Delta$, on peut, au moyen de valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles, attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rendre toutes ces formes $\leqq g\sqrt[n]{\Delta}$ en valeur absolue, et, par conséquent, rendre toutes les premières formes (1) $\leqq \sqrt[n]{\Delta}$ en valeur absolue. On a, de la sorte, démontré le théorème de Minkowski pour les formes à coefficients *rationnels*.

IV.

Pour étendre maintenant le théorème aux formes à coefficients *quelconques* on a besoin d'un théorème auxiliaire que nous allons d'abord démontrer.

Une réunion de plusieurs systèmes (en nombre fini ou infini), chacun de n formes linéaires, sera nommé un « ensemble » de systèmes de formes [1]. Nous considérerons un tel ensemble, satisfaisant aux conditions suivantes :

On pourra déterminer deux grandeurs positives δ et ε telles que, pour chaque système quelconque de formes

$$(1) \quad y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui appartient à l'ensemble, chaque coefficient c_{ik} soit

(1) G. Cantor, *Contribution à l'exposition de la Théorie des ensembles transfinis* (*Math. Ann.*, t. LXVI, p. 481) et Travaux précédents du même auteur.

en valeur absolue inférieur à δ, et que la valeur absolue du déterminant $|c_{ik}|$ soit supérieure à ε.

Maintenant, soit (1) un système déterminé de formes, pris dans l'ensemble, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de nombres entiers, pour lesquels les valeurs des formes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soient toutes en valeur absolue $\leqq$ G, G désignant une grandeur positive assignée. Les solutions des équations (1) peuvent être désignées par

$$(2) \qquad x_i = \gamma_{1i}y_1 + \gamma_{2i}y_2 + \ldots + \gamma_{ni}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

en ce cas γ_{ik} est le sous-déterminant de c_{ik} dans le déterminant $|c_{ik}|$ divisé par le déterminant lui-même.

Puisque chacun des $(n-1)!$ éléments de ce sous-déterminant est, pris en valeur absolue, inférieur à δ^{n-1}, on a

$$(3) \qquad \operatorname{abs} \gamma_{ik} < (n-1)! \frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad |x_i| < n! \frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon} G \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette limite, pour les valeurs absolues des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ne dépend que de δ, ε, G. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un système de valeurs numériques entières, pour lequel les formes d'un système de formes pris dans l'ensemble sont toutes prises en valeur absolue, $\leqq$ G, ce système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se trouve nécessairement parmi un nombre fini de systèmes de valeurs qui dépendent exclusivement de δ, ε, G.

[Si l'on représente chaque système de valeurs numériques entières $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par un point d'un espace à n dimensions, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le théorème précédent apparaît comme conséquence de ce fait que la totalité des points dont les coordonnées ont pour valeur des nombres entiers (*points d'un réseau*), forme un ensemble de points sans points-limites (Haüfungsstelle) à distance finie].

V.

Les formes

$$(1) \qquad c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

peuvent maintenant avoir des coefficients réels quelconques et un déterminant Δ différent de zéro. Alors chaque coefficient c_{ik} sera représenté par une série fondamentale de Cantor

$$(2) \qquad c_{ik} = (r_{ik}^{(1)}, r_{ik}^{(2)}, \ldots, r_{ik}^{(\lambda)}, \ldots),$$

en sorte que $r_{ik}^{(\lambda)}$ désigne, par suite, un nombre rationnel qui, pour λ croissant indéfiniment, tend vers la limite c_{ik}. Si l'on désigne par $\Delta^{(\lambda)}$ le déterminant du système de formes

$$(3) \qquad r_{i1}^{(\lambda)}x_1 + r_{i2}^{(\lambda)}x_2 + \ldots + r_{in}^{(\lambda)}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a évidemment

$$(4) \qquad \lim_{\lambda=\infty} \Delta^{(\lambda)} = \Delta.$$

Si l'on convient maintenant d'attribuer à λ les valeurs 1, 2, 3, ..., on tirera de (3) un ensemble de systèmes de formes qui satisfait aux conditions du précédent paragraphe quand on y supprime les systèmes de formes où l'on aurait $\Delta^{(\lambda)} = 0$. Pour chaque indice λ déterminé, on peut attribuer à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles, telles que

$$(5)\quad \begin{cases} \left| r_{i1}^{(\lambda)} x_1 + r_{i2}^{(\lambda)} x_2 + \ldots + r_{in}^{(\lambda)} x_n \right| \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs} \Delta^{(\lambda)}} \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

et il existe alors certainement, d'après le théorème du numéro précédent, un pareil système de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui, pour un nombre infini d'indices λ, satisfait aux inégalités (5). Pour un tel système $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut passer à la limite $\lambda = \infty$, et l'on obtient alors

$$(6)\qquad | c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n | \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs} \Delta},$$

et le théorème de Minkowski se trouve maintenant complètement démontré.

VI.

Lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres entiers qui ne sont pas tous nuls et qui satisfont aux inégalités (6), ou bien c'est partout le signe $<$ qui peut avoir lieu dans ces inégalités, ou bien dans une ou plusieurs d'entre elles c'est le signe d'égalité qui peut avoir lieu. Mais nous allons aussi démontrer qu'il est possible de déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de telle sorte que ce soit le signe $<$ qui ait lieu en $n - 1$ quelconques des inégalités (6), dans les $(n - 1)$ dernières, par exemple [1].

Si l'on désigne par $k_1, k_2, \ldots, k_n$, n grandeurs positives qui satisfont à la condition

$$(1)\qquad k_1 k_2 \ldots k_n = \operatorname{abs} \Delta,$$

[1] Minkowski, *Géométrie des nombres*, p. 106.

les formes

$$(2)\quad \frac{1}{k_i}(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ont pour déterminant ± 1.

Par conséquent, on peut déterminer les nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne sont pas tous nuls, tels que l'on ait

$$(3)\quad |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| \leqq k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Choisissons maintenant une suite de grandeurs positives

$$(4)\qquad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_\lambda, \quad \ldots,$$

qui soient toutes $< \sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta}$ et qui satisfassent à la condition $\lim\limits_{\lambda=\infty} \varepsilon_\lambda = 0$, et déterminons, pour chaque indice λ, la grandeur positive ε'_λ au moyen de l'équation

$$(5)\qquad (\sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta} + \varepsilon'_\lambda)(\sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta} - \varepsilon_\lambda)^{n-1} = \operatorname{abs}\Delta.$$

On a évidemment aussi

$$\lim_{\lambda=\infty} \varepsilon'_\lambda = 0.$$

Maintenant, pour chaque indice λ, les inégalités

$$(6)\qquad \begin{cases} |c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n| \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta} + \varepsilon'_\lambda, \\ |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta} - \varepsilon_\lambda \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

pourront être satisfaites [en vertu de (3)]. Et, d'après le paragraphe IV, on peut supposer qu'un seul et même système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfait aux inégalités (6) pour un nombre infini d'indices λ. Alors, pour un pareil système, on aura

$$|c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| < \sqrt[n]{\operatorname{abs}\Delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

et le passage à la limite $\lambda = \infty$ nous montre que l'on a, en même temps,

$$| c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n | \leqq \sqrt[n]{\text{abs}\, \Delta}.$$