L. RIPERT

Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 101-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__101_0>

[P1] [P2]

SUR L'HOMOGRAPHIE ET LA DUALITÉ APPLIQUÉES AUX PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU PLAN;

PAR M. L. RIPERT.

Préliminaires.

1. Lorsque l'on a donné, en Géométrie élémentaire, les définitions des éléments métriques, dont les deux principales, celles de la *distance de deux points* et de l'*angle de deux droites* remontent à l'antiquité, il est clair que l'on ne pouvait pas se préoccuper de l'application des principes de dualité et d'homographie. Pour pouvoir appliquer ces principes, il ne faut donc pas craindre de revenir en arrière, d'analyser les définitions données, d'examiner comment l'on pourrait, sans changer leur signification, les transformer de manière qu'elles donnent prise à l'application successive des deux principes.

Chasles, dans ses Mémoires annexés à l'*Aperçu historique*, a défini le principe d'homographie comme résultant de deux applications du principe de dualité. C'est en effet le moyen le plus simple de *démonstration*. Mais l'ordre d'*application*, naturel et logique, est : 1° la transformation *sans changement de nom* des propriétés, c'est-à-dire l'homographie; 2° la transformation *avec changement de nom* des propriétés, c'est-à-dire la dualité. Il paraît très difficile, en général, d'appliquer *directement* le principe de dualité aux propriétés métriques. Je me propose de prouver que cette application est toujours possible et même facile quand les propriétés ont été préalablement généralisées par homographie.

2. J'admets comme acquis et hors de contestation : 1° les principes eux-mêmes et la généralité de leur application aux propriétés *projectives*, d'où il suit que le problème de l'application aux propriétés *métriques* revient à donner à ces propriétés le *caractère projectif;* 2° le double et fondamental théorème de Chasles : *Dans deux figures homologues ou corrélatives, les rapports anharmoniques d'éléments homologues ou corrélatifs sont égaux;* 3° l'existence symbolique, dans le plan, d'une droite i de l'infini, qui se trouve déterminée par les deux points imaginaires I_1 et I_2, dits *points cycliques,* lesquels déterminent eux-mêmes la famille des *cercles* du plan (caractérisée par leur passage par I_1, I_2); 4° la possibilité homographique de substituer, à cette droite i ou $I_1 I_2$, une droite quelconque n, déterminée par deux points fixes arbitrairement choisis (réels ou imaginaires, r ou i) N_1, N_2, qui déterminent eux-mêmes toute une famille de coniques pour lesquelles, dans un précédent article (*N. A.*, p. 446; 1898), j'ai proposé le nom d'*homoponctuelles* (c'est-à-dire astreintes à passer toutes par N_1, N_2); 5° la corrélation de la droite n ou $N_1 N_2$ (dont i ou $I_1 I_2$ est un cas particulier) avec un point N, arbitrairement choisi, déterminé par deux droites fixes données (r ou i) n_1, n_2, lesquelles déterminent elles-mêmes toute une famille de coniques *homotangentes* (c'est-à dire astreintes toutes à toucher n_1, n_2).

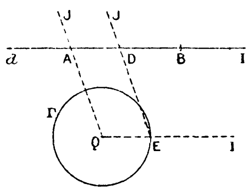
Un cercle est déterminé si l'on donne son centre (pôle de i) et un point, ou encore trois points. De même, une conique *homoponctuelle* est déterminée par la donnée du pôle de n et d'un point, ou encore de trois points. Une conique *homotangente* est déterminée si l'on donne la polaire de N et une tangente, ou encore trois tangentes. La droite n sera dite *droite fondamentale* dans les transformations homographiques, et le point N *point fondamental* dans les transformations dualistiques.

Distance anharmonique de deux points.

3. La *distance* (métrique) de deux points A et B est (ou s'exprime par) le nombre d'unités de longueur contenues dans le segment AB. Cette définition implique ce qui suit :

Étant donnée (*fig.* 1) une droite d qui rencontre i en un point I et sur laquelle on prend deux points A et B,

Fig. 1.



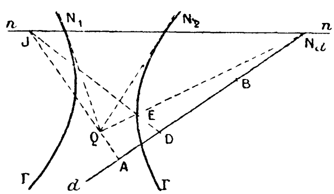
on considère, dans la famille des cercles (I_1, I_2) du plan, un cercle Γ, qui sera dit *cercle-unité*, ayant pour pôle de i un point arbitraire Q et d'un rayon égal à l'unité de longueur arbitrairement choisie [1] On mène QI qui rencontre Γ en E, QA qui rencontre i en J, et JE qui rencontre d en D. Le rapport $\frac{AB}{AD}$, c'est-à-dire le rapport

[1] Le *cercle-unité* est indispensable pour déterminer la *direction* et le *sens* des segments. A chaque diamètre EQE′ correspond une direction avec ses deux sens (QE, QE′). D'où résulte, pour les définitions (4 et 7) la nécessité des *coniques-unités* (homoponctuelle ou homotangente).

anharmonique $\frac{AB.DI}{AD.BI} = (ABDI)$, est la *distance* des deux points A et B, ou *longueur* du segment AB (les mots : par rapport à i et au cercle-unité Γ, étant sous-entendus).

4. Par généralisation, étant donnée (*fig.* 2) une droite d sur laquelle on prend deux points A et B, et qui rencontre la droite fondamentale n en un point N_d, on considère, dans la famille de coniques homoponctuelles

Fig. 2.



(N_1, N_2), une conique Γ, qui sera dite *conique-unité*, ayant pour pôle de n un point arbitraire Q et d'amplitude arbitrairement choisie. On mène QN_d qui rencontre Γ en E, QA qui rencontre n en J, et JE qui rencontre d en D. Le rapport anharmonique

$$\frac{AB.DN_d}{AD.BN_d} = (ABDN_d)$$

sera dit la *distance anharmonique* des deux points A et B, ou la *longueur anharmonique* du segment AB (les mots : par rapport à la droite fondamentale n et à la conique-unité Γ étant sous-entendus).

5. *Remarque.* — Les *fig.* 1 et 2 peuvent être faites d'une manière indépendante ; mais, si elles sont homologues, en vertu du théorème de Chasles (2, 2°), le rap-

port (ABDI) de la *fig.* 1 est égal au rapport ($ABDN_d$) de la *fig.* 2. Il en sera de même pour deux rapports homologues quelconques. Donc, *toute relation entre des longueurs, exprimant une propriété métrique de la fig.* 1, *subsistera entre les longueurs anharmoniques homologues de la fig.* 2 *et exprimera la propriété anharmonique homologue de cette seconde figure.*

6. *Applications.* — 1° Un cercle de centre O (pôle de i) est le lieu des points M tels que la longueur OM soit constante. Donc, une conique *homoponctuelle,* ayant O pour pôle de n, est le lieu des points M tels que la longueur anharmonique OM soit constante. Cette constante sera dite le *rayon anharmonique* de la conique homoponctuelle.

2° Une conique *non cercle* C est le lieu des points M tels que la somme ou différence de leurs distances à deux points fixes F et F′, dits *foyers,* soit égale à la longueur $2a$ de l'*axe focal* (c'est-à-dire du diamètre SS′ déterminé par F, F′). Le centre O (pôle de i) est le conjugué harmonique du point K à l'infini sur cette droite, soit par rapport au couple (F, F′), soit par rapport au couple (S, S′). En désignant par R et R′ les extrémités de l'axe non focal, qui coupe i en un point L, pôle conjugué de K par rapport au cercle-unité Γ, on a

$$OS = OS' = a, \qquad OR = OR' = b, \qquad OF = OF' = c,$$

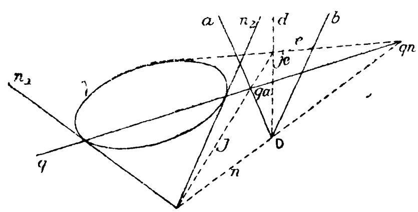
avec $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F′ par rapport à C sont les *directrices,* etc.

Donc, une conique *non-homoponctuelle* C est le lieu des points M tels que la somme ou différence de leurs distances anharmoniques à deux points fixes F et F′ qui seront dits *foyers* (par rapport à n), soit égale à la longueur anharmonique $2a$ de la *corde focale* (par rapport à n) SS', déterminée par F et F'. Le pôle O de n est le conjugué harmonique du point K d intersection de n avec cette droite, soit par rapport au couple (F, F'), soit par rapport au couple (S, S'). En désignant par R et R' les extrémités de la corde conjuguée de SS', c'est-à-dire passant par O et le point L de n qui est pôle conjugué de K par rapport à la conique-unité Γ, les longueurs *anharmoniques* OS et OS' ou a, OR et OR' ou b, OF et OF' ou c, sont respectivement égales, et l'on a, entre elles, la relation $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F' par rapport à C seront dites les *directrices correspondantes* (par rappoit à n), etc.

Angle anharmonique de deux droites.

7. Étant donné un point D, intersection de deux droites a et b (*fig.* 3), et dont la jonction au point fon-

Fig. 3.



damental N est la droite n_D, on considère, dans la famille de coniques homotangentes (n_1, n_2) une conique arbitrairement choisie γ, ayant q pour polaire de N, et qui sera dite *conique-unité*. Soit e une tangente à cette conique menée par le point qn_D. On joint les points qa et N par la droite j, qui coupe e en je, et l'on joint je à D par la droite d. Le rapport anharmonique ($abdn_D$) (¹)

(¹) On sait que le rapport anharmonique ($abdn$) s'exprime, indésera dit l'*angle anharmonique* des deux droites a et b (les mots : par rapport à N et à γ étant sous-entendus).

8. *Remarques.* — 1° Il importe d'observer ici que, tandis que la distance (ou longueur) anharmonique admet, comme cas particulier (3, 4) la distance (ou longueur) métrique, il n'en est pas de même de l'angle anharmonique, comparé à l'angle métrique *exprimé en degrés et subdivisions de degrés*. Cette question mérite quelques développements, que, pour ne pas interrompre l'exposé actuel, je renvoie à une Note à la fin de cet article. Dans ce qui suit, il sera exclusivement question de l'angle *anharmonique* tel qu'il vient d'être défini.

2° Si la *fig.* 3 est la corrélative de la *fig.* 2, on a $(\mathrm{ABDN}_d) = (abdn_{\mathrm{D}})$. Donc, *toute relation entre des longueurs anharmoniques, exprimant une propriété anharmonique de la fig.* 2, *subsistera entre les angles anharmoniques corrélatifs de la fig.* 3 *et exprimera la propriété anharmonique corrélative de cette dernière figure.*

3° Par le point qn_{D}, on peut mener à γ deux tangentes e et e', d'où résultent deux droites d et d'. Mais, de même (3 et 4), QI ou QN_d coupaient Γ en deux points E et E', d'où résultaient deux points D et D'. Les rapports anharmoniques (ABDI) et (ABD'I), (ABDN_d) et $(\mathrm{ABD'N}_d)$, $(abdn_{\mathrm{D}})$ et $(abd'n_{\mathrm{D}})$ sont respectivement égaux et de signes contraires. Il ne peut y avoir aucune difficulté dans les dualisations en faisant toujours correspondre les rapports anharmoniques de mêmes signes.

9. *Applications.* — 1° Une conique *homotangente*

---

pendamment de la considération de toute sécante. par la fonction $\dfrac{\sin(a, b).\sin(d, n)}{\sin(a, d).\sin(b, n)}$.

ayant o pour polaire de N est l'enveloppe des droites m telles que l'angle anharmonique (o, m) soit constant. Cette constante sera dite l'*angle anharmonique* de la conique homotangente.

2° Une conique *non-homotangente* c est l'enveloppe des droites m telles que la somme ou la différence de leurs angles anharmoniques avec deux droites fixes f et f' qui seront dites *focales* (par rapport à N) soit égale à l'angle anharmonique $2A$ des tangentes s, s' menées à c du point d'intersection de f et f'. La polaire o de N est la conjuguée harmonique de la droite k de jonction de N au *point focal* $ss'ff'$, soit par rapport à (f, f') soit par rapport à (s, s'). En désignant par r et r' les tangentes menées à c du point d'intersection de o avec la droite l passant par N et qui est polaire conjuguée de k par rapport à la conique-unité γ, les angles anharmoniques (o, s) et (o, s') ou A, (o, r) et (o, r') ou B, (o, f) et (o, f') ou C sont respectivement égaux, et l'on a entre eux la relation $A^2 \mp B^2 = C^2$. Les pôles de f et f' par rapport à C seront dits les *points directeurs correspondants* (par rapport à N), etc.

Distance anharmonique d'un point à une droite.

10. La *distance* (métrique) d'un point A à une droite d est celle de A à l'intersection de d avec la droite qui joint A au point de i qui est le conjugué harmonique du point commun à i et à d par rapport au couple (I_1, I_2).

11. La *distance anharmonique* (par rapport à n, N_1, N_2) d'un point A à une droite d sera donc celle (4) du point A à l'intersection de d avec la droite qui joint A au point de n, conjugué harmonique du point commun à n et d par rapport au couple (N_1, N_2).

12. *Applications.* — 1° Un cercle étant l'enveloppe des droites dont la distance à un point fixe (pôle de i) est constante, une conique *homoponctuelle* est l'enveloppe des droites dont la distance anharmonique à un point fixe (pôle de n) est constante.

2° Une conique *non-cercle* C est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe F (foyer) et à une droite fixe d (directrice) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique est tangente à i en un point déterminé I (pôle de i); elle n'a pas d'autre foyer et directrice possible que F et d; elle est dite *parabole* et celui de ses diamètres qui passe par F est l'*axe*.

Une conique *non-homoponctuelle* C est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances anharmoniques à un point F (foyer par rapport à n) et à une droite d (directrice par rapport à n) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique est tangente à n en un point N (pôle de n) Elle n'a pas, *par rapport à n*, d'autres foyer et directrice que F et d; elle sera dite, dans ce cas, *parabole par rapport à n*, la droite NF étant l'*axe* (par rapport à n). (Voir *Mathesis*, 1898, p. 251.)

Angle anharmonique d'une droite et d'un point.

13. L'*angle anharmonique* (par rapport à N, n_1, n_2) d'une droite a et d'un point D est celui (7) de la droite a avec la jonction de D au point d'intersection de a et de la droite passant par N et conjuguée harmonique, par rapport à (n_1, n_2), de la jonction de N et D.

14. *Applications.* — 1° Une conique *homotangente* est le lieu des points dont l'angle anharmonique avec une droite fixe (polaire de N) est constant.

2° Une conique *non homotangente c* est l'enveloppe des droites telles que le rapport de leurs angles anharmoniques avec une droite f (focale par rapport à N) et un point D (directeur par rapport à N) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique passe par N, la polaire de ce point étant la tangente n. Elle n'a pas, *par rapport à* N, d'autre focale et directeur que f et D; elle sera dite, dans ce cas, *parabole par rapport à* N, le point nf étant l'*axial* (par rapport à N). (*Mathesis*, *loc. cit.*)

Division anharmonique des segments et des angles.

15. Soit un segment AB d'une droite d dont le point à l'infini est I. On prend, de part et d'autre de A :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{M'A} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{K}},$$

le point M étant entre A et B, c'est-à-dire dans la région de d qui ne contient pas I. En prenant, dans cette région, $\mathrm{AD} = 1$, on a

$$\frac{\mathrm{AM.DI}}{\mathrm{AD.MI}} = -\frac{\mathrm{AM'.DI}}{\mathrm{AD.M'I}} = \frac{1}{k}.\frac{\mathrm{AB.DI}}{\mathrm{AD.BI}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{AB.MI}}{\mathrm{AM.BI}} = k, \qquad \frac{\mathrm{AB.M'I}}{\mathrm{AM'.BI}} = -k.$$

16. Par suite, après remplacement de i par n : Un segment AM d'une droite d, qui coupe n en N_d, sera dit le *$k$ième anharmonique* du segment AB de d si l'on a $(\mathrm{ABMN}_d) = \pm k$. Le signe + correspond au point M *intérieur par rapport à n*, c'est-à-dire situé dans la région de d où ne se trouve pas le point N_d. Le signe — correspond au point M *extérieur par rapport à n*, c'est-à-dire situé dans la même région de d

que N_d. Le point M_1, défini par $(ABM_1N_d) = 1$, sera dit le *milieu anharmonique* du segment AB.

17. Corrélativement, N étant le point fondamental : Un angle (a, m) de sommet D sera dit le $k^{ième}$ *anharmonique* de l'angle (a, b) de même sommet si l'on a

$$(abmn_D) = \pm k,$$

n_D étant la droite de jonction de D et N. Le signe + correspond à la droite m située dans la région de (a, b) où ne se trouve pas n_D; le signe — à la droite m située dans la même région de (a, b) que n_D. La droite m_1 définie par $(abm_1n_D) = 1$, sera dite la *médiane anharmonique* du couple (a, b).

18. *Applications.* — Les droites menées des sommets d'un triangle aux milieux anharmoniques des côtés opposés concourent en un même point, divisant anharmoniquement le segment compris entre le sommet et le côté dans le rapport de 2 à 1; ce point sera dit le *centre anharmonique* du triangle. *Corrélativement,* les points d'intersection des côtés d'un triangle avec les médianes anharmoniques des couples opposés sont sur une même droite, divisant anharmoniquement l'angle du côté avec le sommet dans le rapport de 2 à 1. Cette droite sera dite l'*axe anharmonique* du triangle.

Conjugués et conjuguées anharmoniques.

19. Sur une droite d dont le point à l'infini est I, le conjugué harmonique d'un point O par rapport aux m points $M_1, M_2, \ldots, M_m$ est le point M défini par

$$\frac{m}{\mathrm{OM}} = \sum_1^m \frac{1}{\mathrm{OM}_1} \qquad \text{ou} \qquad m\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{OM}} = \sum_1^m \frac{\mathrm{M}_1\mathrm{I}}{\mathrm{OM}_1}.$$

De même, sur la droite d que coupe n en N_d, le *conjugué anharmonique* (ou par rapport à n) d'un point O par rapport avec m points $M_1, M_2, \ldots, M_m$ sera le point M défini par la relation

$$m\frac{MN_d}{OM} = \sum_1^m \frac{M_1 N_d}{OM_1}.$$

Corrélativement, autour du point D, dont la jonction au point fondamental N est n_D, la *conjuguée anharmonique* (ou par rapport à N) d'une droite o par rapport aux M droites $m_1, m_2, \ldots, m_M$ sera la droite m définie par la relation

$$M\frac{\sin(m, n_D)}{\sin(o, m)} = \sum_1^M \frac{\sin(m_1, n_D)}{\sin(o, m_1)}.$$

20. *Applications.* — Le théorème de la polaire rectiligne de Cotes, qui est déjà une généralisation de celui du diamètre de Newton, est un cas particulier du suivant : *Le lieu des conjuguées anharmoniques d'un point* O *par rapport aux m points d'intersection d'une courbe d'ordre m par des sécantes issues de* O *est une droite.* Le théorème corrélatif est : *L'enveloppe des conjuguées anharmoniques d'une droite o par rapport aux* M *tangentes menées d'un point de o à une courbe de classe* M *est un point.*

21. *Remarque.* — On voit aisément que, pour des segments en ligne droite ayant même point-origine O, ou pour des droites concourantes dont l'origine des inclinaisons est la même droite o, les rapports $\frac{OM}{MN_d}$ et $\frac{\sin(o, m)}{\sin(m, n_D)}$ représentent respectivement, à un facteur constant près, la longueur anharmonique OM ou l'angle anharmonique (o, m). Ceci posé, le théorème des trans-

versales de Newton est un cas particulier du suivant : *Le rapport des produits des distances anharmoniques du point commun variable* O *de deux droites* OA, OB, *qui passent par les points fixes* A *et* B *aux m points d'intersection de ces droites avec une courbe d'ordre m est constant.* Le théorème corrélatif est : *Le rapport des produits des angles anharmoniques de la jonction variable o de deux points oa et ob, situés sur des droites fixes a et b, avec les* M *tangentes menées de ces points à une courbe de classe* M *est constant.* Il est facile de passer de là à la généralisation et à la dualisation du théorème de Carnot.

Éléments anharmoniques des angles et des segments.

22. Le *cosinus* (métrique) de l'angle D formé par les droites a et b est le rapport $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DA}} = (\mathrm{DEAI})$, obtenu en décrivant de D un cercle Γ coupant a en A et b en B, et abaissant de B sur DA (dont le point à l'infini est I) la perpendiculaire BE. En d'autres termes, le cosinus de (a, b) est la longueur du segment DE, par rapport à Γ, dont le rayon est l'unité. La longueur du segment BE est dite le *sinus* de (a, b). La *tangente* est le rapport du sinus au cosinus, etc.

Par généralisation, j'appellerai *cosinus anharmonique* (par rapport à n) du couple de droites (a, b) de sommet D, le rapport anharmonique (DEAK) obtenu en décrivant une conique homoponctuelle Γ, ayant D pour pôle de n, coupant a en A et b en B, puis joignant B au point L de n qui est pôle conjugué par rapport à Γ du point K d'intersection de a et n, prenant enfin le point E d'intersection de BL et DA. En d'autres termes, le cosinus anharmonique de (a, b) est la longueur anharmonique du segment DE, par rapport à Γ dont le rayon anharmonique est l'unité. La longueur anharmonique du segment BE sera dite le *sinus anharmonique* de (a, b); le rapport du sinus au cosinus sera la *tangente anharmonique* de (a, b), etc.

23. Mais il est visible que ces définitions ont des corrélatives.

J'appellerai *quasi-cosinus anharmonique* d'un segment AB d'une droite d l'angle anharmonique (d, e) obtenu en décrivant une conique homotangente γ, ayant d pour polaire du point fondamental N, dont l'angle anharmonique (9) est égal à celui de la conique-unité, et à laquelle les tangentes menées de A et B sont a et b, puis, coupant b par une droite l passant par N et polaire conjuguée par rapport à γ de la droite k de jonction de A à N, menant enfin la jonction e de bl et da. L'angle anharmonique (b, e) sera dit le *quasi-sinus anharmonique* du segment AB; leur rapport sera la *quasi-tangente anharmonique* de AB, etc. Je représenterai ces éléments dans les formules par les abréviations *qu cos*, *qu sin*, *qu tg*, etc.

24. *Applications.* — Dans tout triangle ABC, *considéré par rapport à une droite n*, on a, entre les longueurs anharmoniques a, b, c des côtés et les *lignes* des couples (b, c) ou A, (c, a) ou B, (a, b) ou C, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc \cos A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca \cos B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab \cos C} = 2, \quad \ldots\ldots$$

Dans tout triangle (a, b, c), *considéré par rapport à un point* N, on a, entre les angles anharmoniques A, B, C et les *quasi-lignes* des segments BC ou a, CA ou b, AB ou c, les relations

$$\frac{\mathrm{A}}{\text{qu}\sin a} = \frac{\mathrm{B}}{\text{qu}\sin b} = \frac{\mathrm{C}}{\text{qu}\sin c},$$

$$\frac{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2}{\mathrm{BC}\,\text{qu}\cos a} = \frac{\mathrm{C}^2 + \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}{\mathrm{CA}\,\text{qu}\cos b} = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2}{\mathrm{AB}\,\text{qu}\cos c} = 2, \quad \ldots\ldots$$

Bissectrices et bissecteurs anharmoniques.

25. Les *bissectrices* (métriques) d'un couple (b, c) de sommet A sont deux droites passant par A, conjuguées harmoniques par rapport à (b, c) et diamètres conjugués d'un cercle de centre A. Dans un triangle ABC, la bissectrice *intérieure* de A est celle qui coupe BC dans la région où ne se trouve pas le point à l'infini de BC; l'autre est la bissectrice *extérieure*.

Les *bissectrices anharmoniques* (ou par rapport à n) d'un couple (b, c) de sommet A seront deux droites passant par A, conjuguées harmoniques par rapport à (b, c) et polaires conjuguées par rapport à une conique homoponctuelle (N_1, N_2) ayant A pour polaire de n. Dans un triangle ABC, la bissectrice anharmonique *intérieure* de A sera celle qui coupe BC dans la région où ne se trouve pas son point sur n; l'autre sera la bissectrice anharmonique *extérieure*.

26. Les *bissecteurs anharmoniques* (ou par rapport à N) d'un couple (B, C) des points de la droite a seront deux points de cette droite, conjugués harmoniques par rapport à (B, C) et pôles conjugués par rapport à une conique homotangente (n_1, n_2) ayant a pour polaire de N. Dans un triangle (a, b, c), le bissecteur anharmonique *intérieur* de a sera celui dont la jonction à A est dans la région où ne se trouve pas la droite AN; l'autre sera le bissecteur anharmonique *extérieur*.

27. *Applications.* — 1° Les trois bissectrices anharmoniques *intérieures* d'un triangle se coupent en un même point I, pôle de n par rapport à une conique homoponctuelle tangente aux trois côtés et qui sera dite *inscrite;* deux bissectrices anharmoniques *extérieures* et une bissectrice *intérieure* se coupent en un même point (I_a, I_b ou I_c), pôle de n par rapport à une conique homoponctuelle tangente aux trois côtés et qui sera dite *ex-inscrite.* Corrélativement, les trois bissecteurs anharmoniques *intérieurs* d'un triangle sont sur une droite i, polaire de N par rapport à une conique homotangente passant par les trois sommets et qui sera dite *circonscrite;* deux bissecteurs anharmoniques *extérieurs* et un bissecteur anharmonique *intérieur* sont sur une droite (i_A, i_B ou i_C), polaire de N par rapport à une conique homotangente passant par les trois sommets et qui sera dite *ex-circonscrite.*

2° G étant le centre anharmonique du triangle (18), les trois droites AL_a, BL_b, CL_c, telles que AI, BI, CI soient les bissectrices anharmoniques intérieures de $\widehat{L_aAG}$, $\widehat{L_bBG}$, $\widehat{L_cCG}$, concourent en un même point L, que j'appellerai *point Lemoinien* (par rapport à n). Corrélativement, g étant (18) l'axe anharmonique du triangle, les trois points al_A, bl_B, cl_C, tels que ai, bi, ci soient les bissecteurs anharmoniques intérieurs de $\overline{l_Aag}$, $\overline{l_Bbg}$, $\overline{l_Ccg}$, sont sur une droite l, que j'appellerai la *droite Longchampsienne* (par rapport à N), etc.

28. *Remarque.* — De même que $\widehat{LAG}$ représente l'angle de sommet A dont les côtés sont LA et AG, $\overline{lag}$ représente le segment dont le support est a et dont les extrémités sont la et ag.

Aires, périmètre et périangle anharmoniques.

29. L'aire d'un triangle est le produit de la base par la moitié de la hauteur.

L'*aire anharmonique* S (*par rapport à n*) d'un triangle sera le produit de la longueur anharmonique d'un côté par la moitié de la distance anharmonique (11) de ce côté au sommet opposé. Les trois produits que l'on obtient ainsi sont égaux.

L'*aire corrélative* S (*par rapport à* N) d'un triangle sera le produit de l'angle anharmonique d'un sommet (c'est-à-dire des deux côtés qui le déterminent) par la moitié de l'angle anharmonique (13) de ce sommet avec le côté opposé. Les trois produits que l'on obtient ainsi sont égaux.

30. La somme ($2p = a + b + c$) des longueurs anharmoniques des côtés a, b, c sera dite *le périmètre anharmonique* du triangle (par rapport à n).

Corrélativement, la somme ($2P = A + B + C$) des angles anharmoniques des trois sommets sera dite *le périangle anharmonique* du triangle (par rapport à N).

31. *Applications.* — Toutes formules métriques telles que

$$2S = bc \sin A = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{2R} = 2pr,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R, \quad \ldots,$$

restent vraies quand on remplace les longueurs et angles métriques par des longueurs anharmoniques et des angles anharmoniques, R et r étant alors les rayons anharmoniques (6, 1°) des coniques homoponctuelles circonscrite et inscrite.

En outre, ces formules entraînent les suivantes, r' et R' étant les angles anharmoniques (9, 1°) des coniques homotangentes inscrite et circonscrite :

$$\begin{aligned} 2s &= \mathrm{BC}\,\mathrm{qu}\sin a \\ &= 2\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{P}-\mathrm{A})(\mathrm{P}-\mathrm{B})(\mathrm{P}-\mathrm{C})} = \frac{\mathrm{ABC}}{2r'} = 2\mathrm{PR}', \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{qu}\sin a} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{qu}\sin b} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{qu}\sin c} = \frac{\mathrm{ABC}}{2s} = 2r', \quad \ldots.$$

32. On reconnaîtra aisément que les considérations qui précèdent renferment les éléments nécessaires pour la généralisation et la dualisation de toutes les propriétés métriques du plan. Il est également facile de prévoir que des définitions, plus nombreuses sans doute, parfois plus compliquées, mais du même genre, permettront de généraliser et dualiser les propriétés métriques de l'espace.

Mais, entre la Géométrie plane et la Géométrie générale de l'espace, il existe un intermédiaire important, la *Géométrie de l'espace autour du point,* dont j'ai déjà signalé l'utilité au point de vue des propriétés projectives (*Nouvelles Annales,* p. 446; 1898), et qu'il est indispensable de considérer au point de vue métrique. Je reviendrai sur ce sujet dans un prochain article.

Note.

Sur la division quasimétrique des angles et des segments.

La notion de l'angle anharmonique de deux droites a déjà été prévue, car, dans le *Répertoire bibliographique* [**K10d**] se trouve cette mention : *Expression des angles à l'aide de rapports anharmoniques.*

Mais cette question, comme tant d'autres, se dédouble. Le point de vue de l'*angle anharmonique,* auquel nous l'avons examinée jusqu'ici, est celui qui se prête le mieux à l'application de la dualité; mais il n'est nullement impossible d'introduire un point de vue *quasimétrique*, conservant la division des angles en degrés et subdivisions de degrés, et conduisant, par corrélation, à une division similaire pour les segments.

Un angle $\widehat{AOB}$ est de k degrés si, en décrivant du centre O un cercle qui coupe les côtés en A et B et le prolongement de OA en A', puis inscrivant, dans le demi-cercle ABA', une ligne brisée régulière de 180 côtés, le point B est le $(k+1)^{\text{ième}}$ sommet de cette ligne, A étant le premier.

De même (définition 1), par rapport à n ou $N_1 N_2$, *un angle* $\widehat{AOB}$ *sera dit de k degrés* si, en décrivant du pôle O de n une conique homoponctuelle coupant un côté en A et A' et l'autre en B, puis inscrivant, dans la *demi-conique* ABA', une ligne brisée de 180 côtés ayant des longueurs anharmoniques égales, B est le $(k+1)^{\text{ième}}$ sommet de cette ligne, A étant le premier.

Corrélativement (définition 2), par rapport à N ou $n_1 n_2$, *un segment* $\overline{aob}$ *sera dit de k degrés* si, en décrivant une conique homotangente ayant o pour polaire de N et à laquelle les tangentes menées de oa, ob sont a, a' et b, puis circonscrivant à la *demi-conique* aba' une ligne brisée de 180 sommets ayant des angles anharmoniques égaux, la droite b est le $(k+1)^{\text{ième}}$ côté de cette ligne, a étant le premier.

Examinons spécialement la définition 1. Elle s'applique sans difficulté quand, N_1 et N_2 étant imaginaires, le pôle O de n est intérieur. Il semble au premier abord qu'il n'en est pas de même quand, N_1 et N_2 étant réels, le pôle O est extérieur, car il peut arriver que les coniques homoponctuelles de pôle O coupent un côté de l'angle et ne coupent pas l'autre, ou ne coupent aucun côté. Cette difficulté n'est qu'apparente.

Remarquons en effet que, lorsque l'on donne le pôle O de n sans donner un point de passage, les coniques homoponctuelles sont seulement déterminées *d'espèce;* elles sont dans la même situation que deux coniques concentriques et homothétiques $\left(\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = \pm \lambda\right)$. Or, pour une même valeur de λ, il y a toujours deux coniques homothétiques correspondantes ou *conjuguées,* c'est-à-dire ayant les mêmes directions de diamètres conjugués, et il est indifférent, à ce point de vue, de considérer l'une ou l'autre. Il en est de même pour les coniques homoponctuelles, les diamètres conjugués étant remplacés par les polaires conjuguées d'origine O. On peut donc admettre que, au lieu de décrire du (centre ou) pôle O une conique, on décrira un *couple* de coniques conjuguées ou, ce qui revient au même, que l'on considérera la conique *unique et double, de dimensions nulles* $\left(\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=0\right.$, ou sa transformée homoponctuelle$\left.\right)$. Par rapport à ce couple ou à cette conique double, toutes les intersections de (diamètres ou) polaires sont réelles.

Il est facile d'interpréter corrélativement la définition 2 [1]. D'ailleurs, dans ces questions, il ne s'agit évidemment pas de faire des tracés, mais de donner des définitions telles qu'une expression employée ait un sens. C'est dans ces conditions que l'évaluation des angles en degrés et subdivisions de degré pourra être maintenue dans les énoncés de théorèmes et conservera même, pour les segments, une signification dans les énoncés corrélatifs.

On peut dire, par exemple : Dans tout triangle ABC, les valeurs *quasimétriques* des trois angles intérieurs satisfont à la relation $A+B+C=180°$. Mais, de même, dans le triangle (a, b, c), les valeurs *quasimétriques* des trois côtés intérieurs satisfont à $a+b+c=180°$, étant entendu que ces valeurs quasimétriques sont essentiellement différentes des valeurs anharmoniques précédemment définies.

On peut observer encore qu'il y a quelque chose de peu satisfaisant à n'évaluer métriquement un segment que d'une seule manière, par sa longueur, tandis qu'un angle peut s'évaluer *au moins* de trois manières : par l'arc sous-tendu (nombre de degrés), par ses lignes trigonométriques, et enfin par un rapport anharmonique. Or, à ces trois modes pour les angles, la dua-

---

[1] Dans une famille de coniques homothétiques, la conique de dimensions nulles est celle qui passe par son centre. De même, la conique homoponctuelle de rayon anharmonique nul est celle qui passe par son pôle O de n. Corrélativement, la conique homotangente d'angle anharmonique nul est celle qui touche sa polaire o de N : c'est un système de deux points (r ou i).

lité fait correspondre trois modes pour les segments. A l'angle anharmonique correspond la longueur anharmonique. Mais, aux évaluations des angles par degrés ou par lignes, correspondent des évaluations des segments par (quasi) degrés et par quasi-lignes. La conclusion que l'on peut en tirer est qu'il y a bien des formes pour exprimer une même propriété.