Nouvelles annales de mathématiques

A. Vacquant

Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1898. Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 134-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__134_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.
CONCOURS DE 1898.
SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px+qy)^2-2a(py-qx)+2F(z)=0,$$

où a désigne une constante et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° *Former le système des équations différentielles des caractéristiques;*

2° *Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles;*

3° *Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée;*

4° *Dire à quoi doit se réduire la fonction $F(z)$ pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.*

I. Soit

$$f(x,y,z,p,q)=(px+qy)^2-2a(py-qx)+2F(z)=0.$$

On a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p}=P=(px+qy)x-ay,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial q}=Q=(px+qy)y+ax,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=X=(px+qy)p+aq,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=Y=(px+qy)q-ap,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}=Z=F'(z).$$

On sait que les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)},$$

c'est-à-dire,

$$(E)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{(px+qy)x - ay} &= \frac{dy}{(px+qy)y + ax} \\ &= \frac{dz}{(px+qy)^2 - a(py-qx)} \\ &= \frac{dp}{-[(px+qy)p + aq + pF'(z)]} \\ &= \frac{dq}{-[(px+qy)q - ap + qF'(z)]}. \end{aligned}\right.$$

II. On peut trouver une intégrale de ces équations en formant deux rapports égaux aux précédents et ayant respectivement pour numérateurs les différentielles des quantités $px + qy$ et $py - qx$ qui figurent dans l'équation donnée. Chacun des rapports (E) est égal aux suivants :

$$\begin{aligned} \frac{p\,dx + x\,dp}{-apy - aqx - px\,F'(z)} &= \frac{d(px)}{-a(py+qx) - px\,F'(z)} \\ = \frac{d(qy)}{a(qx+py) - qy\,F'(z)} &= \frac{d(px+qy)}{-(px+qy)\,F'(z)} \\ = \frac{d(py)}{a(px-qy) - py\,F'(z)} &= \frac{d(qx)}{a(px-qy) - qx\,F'(z)} \\ &= \frac{d(py-qx)}{-(py-qx)\,F'(z)}. \end{aligned}$$

D'où l'équation

$$\frac{d(px+qy)}{px+qy} = \frac{d(py-qx)}{py-qx}.$$

Intégrant, on obtient

$$(1)\qquad \frac{px+qy}{py-qx} = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

On a ainsi une intégrale du système (E) *indépendante* de la fonction $F(z)$.

III. D'après la méthode de Lagrange, si l'on résout les équations (1) et $f=0$ par rapport à p et q et que l'on substitue les valeurs trouvées dans l'équation aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

cette équation sera complètement intégrable; après l'intégration, qui introduira une deuxième constante arbitraire β, on aura z en fonction de x, y, α, β, satisfaisant à l'équation donnée, c'est-à-dire une intégrale complète de cette équation.

On a

$$px + qy = \alpha(py - qx),$$
$$\alpha^2(py - qx)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0;$$

d'où

$$py - qx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}}{\alpha^2}.$$

On peut prendre seulement le signe $+$ devant le radical, en convenant que celui-ci sera susceptible d'une double détermination. Des équations

$$\alpha^2(py - qx) = a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)},$$
$$\alpha\,(px + qy) = a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)},$$

on déduit, en éliminant successivement p et q,

$$p\alpha^2(x^2 + y^2) = \quad (y + \alpha x)\,\left[a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}\right],$$
$$q\alpha^2(x^2 + y^2) = (-x + \alpha y)\left[a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}\right].$$

En substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on a

$$\alpha^2(x^2+y^2)\,dz = \left[a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}\right]\left[(y+\alpha x)\,dx+(-x+\alpha y)\,dy\right]$$

ou

$$\frac{\alpha^2\,dz}{a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}} = \frac{\alpha(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Intégrant, on a l'équation

$$(2)\quad \alpha^2\int\frac{dz}{a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{L}(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \beta,$$

définissant une intégrale complète de l'équation donnée $f(x, y, z, p, q) = 0$.

IV. On sait que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Remplaçant, dans cette équation homogène, dx, dy, dp, dq par des quantités proportionnelles tirées des équations (E), on a

$$\begin{aligned}&[(px+qy)p+aq+p\,F'(z)]\,[(px+qy)x-ay]\\ &\quad+[(px+qy)q-ap+q\,F'(z)]\,[(px+qy)y+ax]=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(px+qy)^3-2a(px+qy)(py-qx)-a^2(px+qy)\\ &\qquad+F'(z)\,[(px+qy)^2-a(py-qx)]=0\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation donnée $f = 0$,

$$-(px+qy)[2F(z)+a^2]+F'(z)[(px+qy)^2-a(py-qx)]=0.$$

D'autre part, d'après l'intégrale (1), on a

$$py-qx = \frac{px+qy}{\alpha};$$

par suite, l'équation précédente devient, après suppression du facteur $px + qy$,

$$-[2F(z) + a^2] + F'(z)\left[px + qy - \frac{a}{\alpha}\right] = 0$$

ou

$$(3) \quad [(px + qy)F'(z) - 2F(z) - a^2]\alpha - aF'(z) = 0.$$

Si l'on considère une surface intégrale, le long d'une caractéristique, α est constant, mais varie d'une caractéristique à l'autre, de sorte que l'équation précédente, du premier degré en α, doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de α; pour cela, il faut et il suffit

$$(px + qy)F'(z) - 2F(z) - a^2 = 0$$

et

$$aF'(z) = 0.$$

En supposant la constante a différente de zéro, ces deux équations se réduisent aux suivantes :

$$F'(z) = 0,$$
$$2F(z) + a^2 = 0,$$

c'est-à-dire à une seule

$$F(z) = -\frac{a^2}{2}.$$

L'intégrale complète (2) devient dans ce cas

$$\frac{\alpha^2 z}{a(1 + \sqrt{1 + \alpha^2})} = \frac{\alpha}{2}L(x^2 + y^2) - \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

On voit alors que la section d'une surface intégrale par un plan $z = h$ est une spirale logarithmique.

Si la constante a est nulle, l'équation donnée est

$$(px + qy)^2 + 2F(z) = 0;$$

elle se décompose en deux équations linéaires

$$px + qy \pm \sqrt{-2F(z)} = 0.$$

Les équations des courbes caractéristiques sont, en attribuant au radical une double détermination,

$$(E_1) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}}.$$

Une première intégrale

$$y = \alpha_1 x$$

montre que les caractéristiques sont des courbes planes; le plan osculateur en un point quelconque d'une caractéristique se confond avec le plan de la courbe; celle-ci devant être une ligne asymptotique d'une surface intégrale, le plan osculateur doit être tangent à la surface; alors le plan d'une courbe caractéristique doit être tangent à la surface en tous les points de cette courbe; une surface intégrale quelconque étant un lieu de caractéristiques, on en déduit que c'est une surface développable et que les caractéristiques sont des droites. Cela étant, il est facile de déterminer la fonction $F(z)$, car une deuxième intégrale des équations (E_1) déduite de l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}}$$

ou

$$d\,L(x) = \frac{dz}{\sqrt{2F(z)}} = d\,L\varphi(z)$$

est

$$cx = \varphi(z),$$

c désignant une constante arbitraire et φ une fonction déterminée. Il faut, d'après ce qui précède,

$$\varphi(z) = bz + b'.$$

Or

$$\frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}} = \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)} = \frac{b\,dz}{bz+b'} = \frac{dz}{z+\gamma},$$

d'où

$$-2F(z) = (z+\gamma)^2.$$

Les deux équations linéaires en lesquelles se décompose l'équation donnée sont

$$px + qy = \pm(z+\gamma).$$

On peut conserver seulement le signe $+$ et l'on a

$$px + qy = z + \gamma,$$

équation différentielle des cônes de sommet $(0, 0, -\gamma)$.

Remarque. — Quand $F(z) = -\frac{a^2}{2}$, les caractéristiques qui sont des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales, jouissent de cette propriété : *leurs tangentes appartiennent à un complexe de droites;* cette propriété est la réciproque de celle-ci : *quand les tangentes aux courbes caractéristiques, pour une équation* $f(x, y, z, p, q) = 0$, *appartiennent à un complexe de droites, ces caractéristiques sont des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.* La démonstration est facile; on sait que les tangentes aux courbes caractéristiques qui passent par un point $M(x, y, z)$ sont les génératrices d'un cône (T), enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales passant par ce point. Si l'on cherche l'enveloppe du plan

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

p et q étant liés par la relation

$$f(x, y, z, p, q) = (px+qy)^2 - 2a(py-qx) - a^2 = 0,$$

ou encore, si l'on remarque que $f(x, y, z, p, q) = 0$ peut être regardée comme l'équation tangentielle du cône parallèle à (T) menée par l'origine, on a pour l'équation du cône (T)

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & -ay & X-x \\ xy & y^2 & ax & Y-y \\ -ay & ax & -a^2 & Z-z \\ X-x & Y-y & Z-z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Une génératrice de ce cône, d'équations

$$\frac{X-x}{\lambda} = \frac{Y-y}{\mu} = \frac{Z-z}{\nu}$$

aura pour coordonnées pluckériennes

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad l = \nu y - \mu z, \quad m = \lambda z - \nu x, \quad n = \mu x - \lambda y.$$

L'équation du cône (T) peut s'écrire, après développement du déterminant et simplification

$$a(\lambda^2 + \mu^2) + 2n\nu = 0;$$

c'est l'équation d'un complexe de droites du second ordre; les tangentes aux caractéristiques appartiennent à ce complexe.