Nouvelles annales de mathématiques

Godefroy

Démonstration nouvelle de la règle de convergence de Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 157-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__157_0>

[D2aα]

DÉMONSTRATION NOUVELLE DE LA RÈGLE DE CONVERGENCE DE GAUSS;

PAR M. GODEFROY,
Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille.

La règle de convergence de Gauss peut s'énoncer :

Si dans une série positive le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + an^{p-1} + a_1 n^{p-2} + \ldots + a_{p-1}}{n^p + bn^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \ldots + b_{p-1}},$$

les termes décroissent constamment à partir d'un certain rang et tendent vers zéro pour $b - a > 0$, *ils finissent par augmenter indéfiniment pour* $b - a < 0$, *et ont une limite non nulle pour* $b - a = 0$; *la série est convergente quand on a* $b - a > 1$; *dans tous les autres cas elle est divergente.*

Si l'on pose

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n$$

et que l'on remplace $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ par sa valeur, on trouve pour $n\alpha_n$ une fraction rationnelle dont les deux termes sont de degré p; en effectuant la division et limitant le quotient à son premier terme $b - a$, l'expression $n\alpha_n$ peut donc se mettre sous la forme

$$n\alpha_n = b - a + \frac{\lambda}{n}\varphi(n),$$

λ désignant une constante et $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$.

I. Soit d'abord $b - a > 0$, le nombre α_n finissant par devenir positif, les termes vont en décroissant à partir d'un certain rang; d'autre part, k étant un nombre compris entre zéro et $b - a$ pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 + \frac{k}{m},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 + \frac{k}{m+1} \cdots \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 + \frac{k}{n-1},$$

d'où

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 + \frac{k}{m}\right)\left(1 + \frac{k}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{n-1}\right),$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 + k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right);$$

m restant fixe, le second membre de cette inégalité croît au delà de toute limite, lorsque n augmente indéfiniment; par suite, u_n tend vers zéro.

II. Soit maintenant $b - a < 0$, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ se trouve dans les mêmes conditions que la série de terme général u_n dans l'hypothèse précédente, ses termes à partir d'un certain rang, vont donc en décroissant et tendent vers zéro; par suite, ceux de la série considérée finissent par augmenter indéfiniment.

III. Soit enfin $b - a = 0$, on trouve alors que $n^2\alpha_n$ peut se mettre sous la forme

$$n^2 x_n = b_1 - a_1 + \frac{\lambda}{n}\varphi(n),$$

λ désignant encore une constante et $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$. Si l'on suppose $b_1 - a_1 < 0$, le nombre α_n finissant par devenir négatif, les termes vont en croissant à partir d'un certain rang; d'autre part, k étant un nombre supérieur à $a_1 - b_1$ pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 - \frac{k}{m^2},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 - \frac{k}{(m+1)^2} \cdots \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 - \frac{k}{(n-1)^2},$$

d'où, comme on peut supposer m supérieur à k,

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 - \frac{k}{m^2}\right)\left[1 - \frac{k}{(m+1)^2}\right]\cdots\left[1 - \frac{k}{(n-1)^2}\right],$$

et à plus forte raison

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 - k\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \cdots\right];$$

or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, on peut toujours prendre m assez grand pour que le coefficient de k soit inférieur à un nombre positif déterminé σ plus petit que $\frac{1}{k}$; on a dès lors

$$u_n < \frac{u_m}{1 - k\sigma},$$

m restant fixe, u_n reste toujours inférieur à un nombre déterminé et fini, lorsque n augmente indéfiniment; comme il croît constamment, il a donc une limite inférieure ou au plus égale à ce nombre et, par suite, non nulle. Il en est de même si l'on suppose $b_1 - a_1 > 0$, car, en considérant la série de terme général $\frac{1}{u_n}$, ses termes, d'après ce qu'il vient d'être dit, croissent à partir d'un certain rang et tendent vers une limite non nulle, ceux de la série considérée finissent donc par décroître constamment et tendent aussi vers une limite non nulle.

Il résulte de ce qui précède que le seul cas où la série puisse être convergente est celui où l'on a $b - a > 0$; si l'on applique alors la règle de Raabe, comme la limite de $n\alpha_n$ pour $n = \infty$ est égale à $b - a$, on en conclut que la série est convergente pour $b - a > 1$ et divergente pour $b - a < 1$; elle est encore divergente pour $b - a = 1$; en effet, dans ce cas, en désignant par $1 + \beta_n$ le produit $n\alpha_n$, la limite de $n\beta_n$ est égale à λ ou à zéro. La série n'est donc convergente que si l'on a $b - a > 1$.

Bibliographie.

Gauss (*Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 139-144).

J. Bertrand (*Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 240-244).

Eugène Rouché (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. V, p. 10-14; 1866).

Baillaud (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. VI, p. 189-192; 1869).

Charles Brisse (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 36-37; 1870).

Anonyme (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 111-112; 1870).

A. de Saint-Germain (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIV, p. 212-215; 1890).

Ch. Méray (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. III, p. 33-41; 1893).