NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LECORNU

Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale constante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 161-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__161_0>

[R7bβ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT SOLLICITÉ PAR UNE FORCE CENTRALE CONSTANTE;

PAR M. LECORNU.

Je considère un point matériel M, de masse m; attiré par une force constante mF émanée d'un point fixe. Prenant celui-ci comme origine, j'appelle r et θ les coordonnées polaires du point M. Soit v la vitesse de M et soit p la distance de l'origine à la tangente à la trajectoire. Le théorème des aires donne immédiatement

$$pv = C_1,$$

C_1 désignant une constante. Le théorème des forces vives donne de son côté

$$v^2 + 2Fr = C_2,$$

C_2 étant une autre constante. En éliminant v et posant

$$\frac{C_1^2}{2F} = k^3, \qquad \frac{C_2}{2F} = h,$$

on obtient la relation

$$(1) \qquad p^2(h - r) = k^3.$$

D'ailleurs, si α est l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on a

$$p = r\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \tang\alpha = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

On déduit de là l'équation différentielle de la trajectoire

$$(2) \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h-r)-k^3}}.$$

L'équation $r^2(h - r) - k^3 = 0$ a toujours une racine négative, que nous appellerons $-$ R. Les deux autres racines sont réelles et positives si $4h^3 - 27k^3 > 0$. Je dis que cette condition est toujours remplie. Comme h est égal à $\frac{v^2 + 2Fr}{2F}$ et k^3 égal à $\frac{p^2 v^2}{2F}$, comme, de plus, p est toujours inférieur à r, il suffit de vérifier l'inégalité

$$(v^2 + 2Fr)^3 - 27F^2 v^2 r^2 > 0.$$

Or, si l'on pose

$$v^2 = \lambda F r,$$

le premier membre devient

$$F^3 r^3 (\lambda - 1)^2 (\lambda + 8).$$

quantité manifestement positive pour toute valeur positive de λ [1]. Soient r_0, r_1 les deux racines positives. Admettons, pour fixer les idées, que r_0 soit inférieur à r_1. L'équation (2) devient

$$(3) \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{(r_1 - r)(r - r_0)(r + R)}}$$

avec les relations

$$R = \frac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}, \qquad h = r_0 + r_1 - R, \qquad k^3 = r_0 r_1 R = \frac{r_0^2 r_1^2}{r_0 + r_1}.$$

On voit sans peine que r_0 et r_1 sont tous les deux inférieurs à h et que, si l'on trace les circonférences Γ_0 et Γ_1 de rayons r_0 et r_1, la trajectoire est tout entière comprise entre ces deux circonférences.

Le rayon de courbure est donné immédiatement par

---

[1] Dans le cas particulier où $\lambda = 1$, c'est-à-dire si $v^2 = Fr$, le mouvement est circulaire et uniforme.

la formule connue

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

On trouve ainsi

$$(4) \qquad \rho = 2r\left(\frac{h-r}{k}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Comme r reste toujours inférieur à h, le rayon de courbure est partout fini et différent de zéro. On en déduit la forme de la trajectoire : c'est une courbe, assez semblable à l'herpolhodie, composée d'une suite d'arcs identiques, sans inflexion, allant alternativement toucher les circonférences Γ_0 et Γ_1.

Si l'on suppose que le centre d'attraction se trouve rejeté à l'infini, le mouvement devient, à la limite, parabolique. Dans cette transformation, la circonférence Γ_1 devient la tangente au sommet de la parabole; la circonférence concentrique de rayon h devient la directrice. On a donc, en appelant q le paramètre de la parabole

$$\lim(h - r_1) = \lim(r_0 - \mathrm{R}) = \frac{q}{2}.$$

Mais $\mathrm{R} = \dfrac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}$. Donc

$$\lim \frac{r_0^2}{r_0 + r_1} = \frac{q}{2}.$$

Ceci montre que r_0 devient infini du même ordre que $\sqrt{r_1}$ et que $\dfrac{k^3}{r_1^2}$ a pour limite $\dfrac{q}{2}$.

On sait que, dans la parabole, si α est l'angle de la tangente avec l'axe, et ρ le rayon de courbure, on a

$$\rho \sin^3\alpha = q.$$

Dans le cas de notre trajectoire générale, on a

$$r^2(h - r)\sin^2\alpha = k^3,$$

d'où, en appliquant la formule (4) :

$$\rho \sin^3 \alpha = \frac{2k^3}{r^2}.$$

Par conséquent, *le produit* $\rho \sin^3 \alpha$ *varie en raison inverse du carré de la distance au centre.*

On sait aussi que, dans la parabole, si x est la distance d'un point à la directrice, on a

$$x \sin^2 \alpha = \frac{q}{2}.$$

Ici, pour avoir la formule correspondante, il faut poser $h - r = x$ et l'on trouve

$$x \sin^2 \alpha = \frac{k^3}{r^2}.$$

Donc *le produit* $x \sin^2 \alpha$ *varie également en raison inverse de* r^2.

Une troisième formule, qui se déduit des précédentes, est

$$\rho = \frac{2x}{\sin \alpha}.$$

Le rapport $\frac{x}{\sin \alpha}$ est évidemment la longueur de la partie de normale comprise entre la courbe et la tangente menée à la circonférence de rayon h, par le point où cette circonférence rencontre le prolongement du rayon vecteur r. Nous avons ainsi la généralisation de cette propriété connue : le rayon de courbure de la parabole est double de la normale limitée à la directrice.

L'équation différentielle (3) de la trajectoire conduit à une intégrale elliptique de troisième espèce. Il faudrait donc, pour faire une étude approfondie de la courbe, avoir recours à la théorie des fonctions elliptiques. Sans entrer dans cette voie, nous allons maintenant rechercher s'il ne serait pas possible d'obtenir un mode de génération analogue à celui qui permet de déduire l'herpolhodie, courbe transcendante, de la polhodie, courbe algébrique.

Si $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ est l'équation de l'ellipsoïde roulant sur un plan fixe situé à la distance $\frac{1}{\sqrt{D}}$ du centre, le mouvement du pôle de Poinsot sur l'herpolhodie est défini par les deux équations

$$\rho\frac{d\rho}{dt}=\mu\sqrt{-(\rho^2-a)(\rho^2-b)(\rho^2-c)D},$$

$$\rho^2\frac{d\chi}{dt}=\mu(\rho^2-\sqrt{-abc D}).$$

Dans ces équations, on a posé

$$(5)\qquad a=-\frac{(B-D)(C-D)}{BCD},\qquad b=\ldots,\qquad c=\ldots.$$

μ est une constante; ρ et χ sont les coordonnées polaires du point mobile. Si l'on suppose $A<B<C$, b est toujours positif; a est positif et c négatif, ou inversement, suivant que B est inférieur ou supérieur à D.

Posons

$$\chi=\mu t+\omega,$$

d'où

$$\rho^2\frac{d\omega}{dt}=-\mu\sqrt{-abc D}.$$

Par l'élimination de t, il vient

$$(6)\qquad d\omega=-\frac{d\rho}{\rho}\,\frac{\sqrt{-abc}}{\sqrt{-(\rho^2-a)(\rho^2-b)(\rho^2-c)}}.$$

Faisons maintenant la substitution $\rho^2=r$, et nous avons

$$2\,d\omega=-\frac{dr}{r}\,\frac{\sqrt{-abc}}{\sqrt{-(r-a)(r-b)(r-c)}}.$$

En comparant avec l'équation (3), on reconnaît que l'identification a lieu si l'on prend $\theta = -2\omega$ et

$$a = r_0, \qquad b = r_1, \qquad c = -\mathrm{R} \qquad \text{pour } \mathrm{D} > \mathrm{B},$$

ou bien

$$a = -\mathrm{R}, \qquad b = r_1, \qquad c = r_0 \qquad \text{pour } \mathrm{D} < \mathrm{B}.$$

Comme nous devons avoir $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\mathrm{R}}$, il en résulte, en vertu des valeurs (5) la relation

$$\frac{1}{\mathrm{A}} + \frac{1}{\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{D}}.$$

Cette relation exprime que le carré de la distance du plan fixe au centre est égal à la somme des carrés des axes de l'ellipsoïde, ce qui détermine complètement la polhodie et l'herpolhodie.

Pour réaliser la transformation $\chi = \mu t + \omega$, il suffit de supposer que le point décrivant l'herpolhodie est, à chaque instant, projeté sur un plan horizontal qui tourne autour de la verticale du centre avec la vitesse angulaire μ (1). On peut imaginer que ce plan soit situé *au-dessus* du centre de l'ellipsoïde à la distance $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}$. Alors l'ellipsoïde lui est constamment tangent au point P′ diamétralement opposé au pôle P de Poinsot, et la trajectoire de P′ sur le plan tournant vérifie l'équation (6). Remarquons que, dans l'*herpolhodographe* de MM. Darboux et Kœnigs, on produit déjà la rotation constante, avec la vitesse angulaire μ, autour de la verticale du centre, et que, par suite, il suffirait de relier invariablement au

(1) Le mouvement obtenu en projetant ainsi le point de contact de l'ellipsoïde sur un plan tournant avec la vitesse μ est, par rapport à ce plan, le mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale ayant une expression de la forme $\alpha\rho + \beta\rho^3$ (*voir* DARBOUX, *Mécanique de Despeyrous*, Note XVII).

système tournant le plan horizontal tangent supérieurement à l'ellipsoïde pour obtenir la génération mécanique de la courbe (6). Il reste ensuite à faire subir à cette courbe la transformation $\rho^2 = r$, $2\omega = -\theta$. Si l'on pose

$$Z = \rho e^{i\omega}, \qquad z = r e^{-i\theta}.$$

cette transformation, qui n'altère pas l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, revient à établir la correspondance $Z^2 = z$. Il est aisé d'imaginer un appareil propre à réaliser cinématiquement cette correspondance.

Au lieu d'un ellipsoïde, on peut prendre comme surface roulante un cône, et le mode de génération se trouve alors simplifié.

Considérons, en effet, le cône

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$$

et la quartique gauche, intersection de ce cône avec l'ellipsoïde

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = -abc$$

(cette quartique peut être regardée comme la limite d'une polhodie tracée sur un hyperboloïde qui dégénère en cône).

Si le cône roule sur l'un de ses plans tangents, la quartique roule sur une courbe dont l'équation différentielle est précisément l'équation (6). On voit qu'ici il n'y a plus à faire intervenir de rotation.

Pour vérifier ce résultat, il suffit de partir des équations

$$x^2 = \alpha(\rho^2 - a), \qquad y^2 = \beta(\rho^2 - b), \qquad z^2 = \gamma(\rho^2 - c),$$

dans lesquelles

$$\alpha = \frac{bc(b-c)}{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}, \qquad \beta = \ldots,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \gamma = \ldots.$$

Ces équations équivalent à celles de la quartique.

Si l'on calcule ds en fonction de ρ et de $d\rho$ par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et si l'on tient compte de la relation

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

on retrouve l'équation (6).

Le problème qui nous occupe est évidemment un cas limite de celui du mouvement d'un point pesant sur un cône de révolution à axe vertical ; il suffit, pour passer du cône au plan, d'imaginer que le cône s'aplatit indéfiniment en même temps que l'intensité de la pesanteur augmente de manière à conserver pour la composante tangentielle une grandeur finie. Le mouvement conique peut d'ailleurs être étudié à peu près comme le mouvement plan ; l'équation différentielle (2) de la trajectoire demeure applicable en considérant θ comme l'angle du plan méridien mobile avec un plan fixe, et r comme la distance du point mobile au sommet. Si l'on veut que $d\theta$ soit l'angle de deux génératrices consécutives, il faut écrire

$$\sin i\, d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h-r)-k^3}}$$

(i désignant l'angle des génératrices avec l'axe).

On construirait cette trajectoire en faisant subir à la trajectoire plane qui correspond aux mêmes valeurs de h et k la transformation qui consiste à changer θ en $\theta \sin i$, puis en enroulant le plan sur la surface du cône.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'il s'agissait d'une force attractive. Examinons rapidement le cas d'un mouvement plan dû à une force répulsive, centrale et constante. Il est aisé de voir que l'équation différentielle de la trajectoire est

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h+r)-k^3}}.$$

La constante k est toujours positive. La constante h peut être positive, nulle ou négative, mais la somme $h+r$ demeure toujours positive. L'équation

$$r^2(h+r)-k^3=0$$

a une, et une seule, racine positive r_0. Si l'on construit la circonférence de rayon r_0, la trajectoire est tangente extérieurement à cette circonférence et présente à peu près l'aspect d'une branche d'hyperbole.

Les propositions, que nous avons énoncées comme généralisation de celles de la parabole, subsistent sans grande modification.

Observons seulement que, dans le cas particulier où la constante h est nulle, la circonférence directrice, de rayon h, se trouve réduite à un point. On a alors

$$r\sin^3\alpha = k^3 \qquad \text{et} \qquad \rho\sin\alpha = 2r.$$

Cette dernière égalité montre que *le rayon de courbure est double de la normale, limitée à la perpendiculaire menée par l'origine sur le rayon vecteur.*

Si l'on cherche à décrire la trajectoire, comme pour le cas de la force attractive, en faisant rouler une surface du second degré sur un plan, on est conduit à des résultats imaginaires.