NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur les nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 234-241

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__234_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[13b]

SUR LES NOMBRES PREMIERS;

PAR M. H. LAURENT.

Je me propose, dans ce travail, d'étudier les propriétés des nombres premiers, en me plaçant à un point de vue qui ne me semble pas encore avoir été envisagé. On ne connaît guère qu'un théorème, celui de Wilson, relatif aux nombres premiers et qui distingue ces nombres des autres entiers. Je commencerai par démontrer un théorème que je crois nouveau et qui ne semble pas découler du théorème de Wilson :

Si l'on considère le produit

$$F_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} (1-x)\,(1-x^2)\ldots(1-x^{n-1}), \\ (1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (1-x^{n-1})(1-x^{2n-2})\ldots(1-x^{(n-1)^2}) : \end{array} \right.$$

1° *Il se réduit à n^{n-1} si n est premier et à zéro si n est composé quand on y remplace x par une racine imaginaire de $x^n - 1 = 0$;*

2° *Si on le divise par $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, le reste est* 0, *si n est composé, il est n^{n-1} si n est premier;*

3° *Le résidu de*

$$\frac{F_n(x)}{(x^n - 1)},$$

relatif aux racines de $x^n - 1 = 0$ est égal à $-n^{n-2}$.

La première partie du théorème est presque évidente, car si n est composé et si α désigne une racine de $x^n - 1 = 0$, cette racine sera primitive ou ne le sera pas; en tout cas si elle l'est, une de ses puissances ne le sera pas, et si α^i est cette puissance $(1 - \alpha^i)(1 - \alpha^{2i})\ldots(1 - \alpha^{ni-i})$ sera nul et $F_n(\alpha)$ sera nul. Si n est premier toutes les racines α de $x^n - 1 = 0$ sont primitives, toutes les lignes du produit $F_n(x)$ sont égales, pour $x = \alpha$, au produit

$$(z - \alpha)(z - \alpha^2)\ldots(z - \alpha^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} \qquad (\text{pour } z = 1)$$

on a n; en sorte que

$$F_n(\alpha) = n^{n-1}.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème énoncé, j'observe que, $Q(x)$ désignant un polynome entier, on a

$$\frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \sum_1^n \frac{F_n(\alpha_i)}{x - \alpha_i}\frac{\alpha_i}{n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ désignant les racines imaginaires de $x^n - 1 = 1$. Si n est composé, on a

$$F_n(\alpha_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x),$$

et $F_n(x)$ est divisible par $(x^n - 1)$ et, *a fortiori*, par $\frac{x^n - 1}{x - 1}$. Si n est premier,

$$(1) \qquad \frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \sum \frac{n^{n-2}\alpha_i}{x - \alpha_i};$$

Or

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \sum \frac{\alpha_i}{x - \alpha_i} + \frac{1}{n} \frac{1}{x - 1};$$

tirons de là

$$\sum \frac{\alpha_i}{x - \alpha_i} = \frac{n}{x^n - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

pour le porter dans (1), et nous aurons

$$\frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \frac{n^{n-1}}{x^n - 1} - \frac{n^{n-2}}{x - 1}$$

ou

$$F_n(x) = Q(x)(x^n - 1) - n^{n-1} \frac{x^n - 1}{x - 1} + n^{n-1}$$

ou

$$F_n(x) = [Q(x)(x - 1) - n^{n-2}] \frac{x^n - 1}{x - 1} + n^{n-1}.$$

C. Q. F. D.

Enfin, la troisième partie du théorème se démontre en observant que (on ne prend pas le résidu relatif à $x = 1$) en vertu de (1)

$$\mathcal{E} \frac{F_n(x)}{x^n - 1} = - n^{n-2}.$$

Cela posé, je considère l'équation (1) et j'y remplace x par $\frac{x}{n}$, elle devient

$$\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)^n - 1} = Q\left(\frac{x}{n}\right) + \sum \frac{n^{n-1}\alpha_i}{x - n\alpha_i} \qquad \text{si } n \text{ est premier,}$$

$$= Q\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{si } n \text{ est composé.}$$

Prenons encore les résidus en excluant la valeur $x=1$, nous aurons

$$\mathcal{E}\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)^n-1}=-n^{n-1}\qquad\text{si } n \text{ est premier,}$$

$$=0\qquad\text{si } n \text{ est composé.}$$

Or la série

$$-\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x^n}{n^n}-1\right)n^{n-1}}=f(x)$$

est évidemment convergente quand x n'est pas racine d'une équation $\left(\frac{x}{n}\right)^i-1=0$; et le résidu de $f(x)$ relatif à une couronne circulaire C formée de deux cercles concentriques à l'origine, l'un de rayon très petit, l'autre de rayon R compris entre n et $n+1$, sera égal à la totalité des nombres premiers compris entre o et $n+1$. Plus genéralement, si l'on pose

$$\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n-1\right]n^{n-i-1}}=f_i(x),$$

et si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ désignent les nombres premiers compris à l'intérieur de la couronne C, on aura

$$-\mathcal{E}f_i(x)=\sum\frac{1}{p^i}.$$

En faisant grandir R indéfiniment, on pourra calculer $\sum\frac{1}{p^i}$ pour tous les nombres premiers.

Enfin, si l'on pose

$$\theta(z)=\left(1-\frac{z^2}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{p_2^2}\right)-\ldots,$$

on aura

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{2z}{z^2 - p_1^2} + \frac{2z}{z^2 - p_2^2} + \ldots$$

et

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = -\mathcal{L}\sum \frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n - 1\right] n^{n-1}} \frac{z}{z^2 - x^2}.$$

Nous avons ainsi le moyen de former une équation admettant pour racines tous les nombres premiers et seulement les nombres premiers.

Le théorème de Wilson conduit à un résultat analogue en observant que

$$\frac{x^{\Gamma(n)} - 1}{x^n - 1}$$

est un polynome entier si n est composé et que le reste de la division de $x^{\Gamma(n)} - 1$ par $x^n - 1$ est $x^{n-1} - 1$, si x est un nombre premier.

On peut trouver plus simplement le nombre des entiers premiers compris entre x_0 et X comme il suit :

Le produit

$$\theta(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{\frac{\pi x}{3}} \cdots \frac{\sin\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \cdots$$

est évidemment convergent quel que soit x; car le facteur général est de la forme

$$1 - \frac{\lambda\pi^2 x^2}{6n^2} \quad (0 < \lambda < 1);$$

la fonction $\theta(x)$ s'annule pour $x = n$, une fois si n est premier, et, en général, plusieurs fois si n est composé, en sorte que $\frac{\theta(x)}{\sin\pi x}\pi x$, sans devenir infinie, n'a plus pour zéros que les nombres composés :

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}$$

a alors pour infinis simples les nombres composés, et

$$\frac{1}{\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} + \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}}$$

aura pour zéros simples les nombres composés; enfin

$$\frac{\pi x}{\sin \pi x \left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x - \frac{1}{x}\right]} = f(x)$$

aura pour infinis simples les nombres premiers.

Or on sait que, si la fonction $f(x)$ a pour infinis simples n nombres compris entre x_0 et X,

$$n\pi + \operatorname{arc\,tang} f(\mathrm{X}) - \operatorname{arc\,tang} f(x) = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \frac{f'(x)\,dx}{1 + f^2(x)},$$

les arc tang étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On pourra donc poser

$$n + \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \frac{f'(x)\,dx}{1 + f^2(x)},$$

ε désignant un nombre toujours facile à calculer et moindre que l'unité. Nous appliquerons cette formule à la recherche des nombres composés en nombre c compris entre x_0 et X; alors

$$(1) \qquad c + \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \frac{d\left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}\right]}{1 + \left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}\right]^2},$$

on a, pour $|x| < 1$,

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} = -2\left(\frac{1}{x^2-n^2} + \frac{1}{x^2-4n^2} + \dots\right),$$

et, en posant

$$S_i = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \dots,$$

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} = 2\left(\frac{s_2}{n^2} + \frac{s_4 x^2}{n^4} + \frac{s_6 x^4}{n^6} + \dots\right),$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x}\right) = 2(s_2^2 + s_4^2 x^2 + s_6^2 x^4 + \dots).$$

On en conclut

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi\cot\pi x + \frac{1}{x} = x[(s_2^2 - 2s_2) + (s_4^2 - 2s_4)x^2 + \dots].$$

Cette formule n'a lieu que si $|x| < 1$; néanmoins, en multipliant ses deux membres par

$$\sin\pi x = \frac{\pi x}{1} - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \dots,$$

on obtiendra une formule vraie pour $|x| > 1$, les deux membres de la nouvelle formule étant symétriques dans toute l'étendue du plan; en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x et en multipliant par $\sin^2\pi x$, on obtiendra encore une formule valable pour toutes les valeurs de x; en sorte que (1) prendra la forme

$$c + \varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{X} \frac{b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots}{\sin^2\pi x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots}\,dx,$$

les a et les b désignant des nombres faciles à calculer; ou même en appelant α_2, α_4, ... de nouvelles constantes,

$$c + \varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{X} \frac{b_2 x^2 + \ldots}{\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \ldots}\,dx$$

ou

$$c + \varepsilon\,\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{X} \frac{b_2 + b_4 x^2 + \ldots}{\alpha_2 + \alpha_4 x^2 + \ldots}\,dx.$$

Il résulte de là qu'il existe une fonction

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi\cot\pi x + \dfrac{1}{x}\right]\sin^2\pi x}{\sin^2\pi x + \left[\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi\cot\pi x + \dfrac{1}{x}\right]^2\sin^2\pi x}$$

qui est le quotient de deux fonctions synectiques, et dont l'intégrale entre les limites x_0 et X donne à une unité près le nombre des entiers composés compris entre ces limites, et l'on a le développement en série du numérateur et du dénominateur de $\psi(x)$.