Nouvelles annales de mathématiques

Stuyvaert

Point remarquable dans le plan d'une cubique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 275-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__275_0>

[M¹5a]

POINT REMARQUABLE DANS LE PLAN D'UNE CUBIQUE;

PAR M. STUYVAERT,

Professeur à l'Athénée royal de Gand.

I.

1. Soit O un point dans le plan d'une cubique Γ; une droite quelconque passant par O rencontre la courbe aux points A, B, C et la conique polaire de O aux points R_1 et R_2. En vertu du théorème de Côtes généralisé, on a, moyennant une démonstration que nous avons exposée ailleurs [1],

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{3}{OR_1 . OR_2} &= \frac{1}{OA.OB} + \frac{1}{OB.OC} + \frac{1}{OC.OA} \\ &= \frac{OA + OB + OC}{OA.OB.OC}. \end{aligned} \right.
$$

Si le point O, non situé sur la courbe, a pour conique polaire un cercle, le premier membre de l'équation est constant; donc *sur tout rayon passant par O, le produit des segments déterminés par la cubique est à la somme algébrique de ces mêmes segments dans un rapport constant.*

Dans les mêmes conditions, *si le point O est sur la courbe, son conjugué harmonique sur un rayon quelconque relativement aux deux autres intersections de ce rayon avec la cubique est la projection orthogonale d'un point fixe sur ce rayon.*

(¹) Voir *Mathesis*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 20; 1898; la proposition dont il s'agit s'y trouve démontrée pour une polaire de degré quelconque d'une courbe d'ordre n.

Ce point fixe est diamétralement opposé à O sur le cercle polaire; il est donc sur la normale en O à la cubique, à une distance quadruple du rayon de courbure de Γ. Cela résulte du théorème connu : *la courbure en un point d'une cubique est double de la courbure, au même point, de sa conique polaire* ([1]).

2. Réciproquement, si un point O, non situé sur la cubique Γ, jouit de la propriété précitée, sa conique polaire est telle que la puissance d'un point relativement à cette conique est constante : c'est donc un cercle.

Si le point O est sur la courbe, la réciproque de la propriété ci-dessus est évidente.

La relation segmentaire (1) étant susceptible de généralisation pour des courbes d'ordre n, et leurs polaires de degré quelconque, on peut facilement étendre le théorème du n° 1. Remarquons toutefois qu'il n'existe pas de cubique telle que la puissance d'un point relativement à la courbe soit constante, tandis qu'il existe des quadriques qui jouissent de cette propriété, à savoir celles qui ont un double contact avec la droite de l'infini, aux points cycliques; la démonstration est aisée ([2]).

3. Il y a toujours, dans le plan d'une cubique, au moins un point dont la conique polaire est un cercle, savoir le point commun aux droites polaires des deux points cycliques; en général, ces deux droites sont imaginaires conjuguées et ont alors un seul point commun réel.

([1]) Ce théorème a été démontré, pour une courbe quelconque, par M. Moutard (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860), par MM. Servais, Demoulin et par nous dans les *Recueils de l'Académie royale de Belgique*.

([2]) Ruffini, *Memoria della R. Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna*, 4^e^ série, t. X; 5^e^ série, t. I, II.

Si la cubique Γ est circulaire, le point en question est un foyer.

Soit $f = 0$ l'équation de Γ, les coordonnées x_1, x_2 étant rectangulaires et rendues homogènes par l'introduction de la troisième variable $x_3 = 1$.

La conique polaire du point O (y_1, y_2, y_3) est représentée par

$$(2)\qquad \left(x_1 \frac{d}{dy_1} + x_2 \frac{d}{dy_2} + x_3 \frac{d}{dy_3}\right)^2 f = 0.$$

Cette conique est un cercle, si l'on a

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dy_1^2} - \dfrac{d^2 f}{dy_2^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 f}{dy_1\, dy_2} = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) représentent deux droites passant par O; en les additionnant et les soustrayant membre à membre, après avoir multiplié par $2\sqrt{-1}$ les termes de la seconde, on obtient les droites polaires des deux points cycliques.

4. Pour certaines cubiques spéciales, les droites représentées par les équations (3) peuvent coïncider, ou l'une de ces deux équations peut être identique. Analytiquement, ces deux hypothèses s'expriment par la relation

$$(4)\qquad k\, \frac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} = \left(\frac{d^2 f}{dx_1^2} - \frac{d^2 f}{dx_2^2}\right);$$

k est un paramètre arbitraire, dont les valeurs zéro et ∞ correspondent au cas où l'une des équations (3) est identique.

Quand la condition (4) est vérifiée, et dans ce cas seulement, les deux points cycliques ont une même droite polaire réelle, dont tous les points jouissent de la propriété énoncée au nº **1**; leurs coniques polaires sont des cercles formant un faisceau, et possédant donc encore deux points communs à distance finie; si la cubique est singulière, le point double est un de ces deux points.

La condition (4) caractérise une classe de cubiques, dont nous exposons quelques propriétés dans le paragraphe III.

5. Les équations (3) peuvent être identiques toutes deux; l'équation de la cubique Γ se réduit alors à

$$(x_1^2+x_2^2)x_3+(ax_1+bx_2)x_3^2+cx_3^3=0;$$

elle représente un cercle et la droite de l'infini; ce cas particulier est donc sans importance.

6. Dans la *parabole semi-cubique*,

$$px_2^2x_3=x_1^3,$$

tous les points de la droite

$$6x_1+2px_3=0$$

ont pour conique polaire un cercle.

Dans la *parabole cubique*,

$$p^2x_2x_3^2=x_1^3,$$

ce sont les points de l'axe des x_2.

Dans la *cissoïde*,

$$(2rx_3-x_1)x_2^2=x_1^3,$$

il n'y a qu'un point jouissant de la propriété en question; il est sur l'axe des x_1 et a pour abscisse $-\frac{2r}{3}$.

Dans la *strophoïde* aussi, le point est unique et, en outre, situé sur la courbe; il est à la fois sommet et foyer; sa conique polaire est le cercle ayant pour diamètre la distance du sommet au nœud.

7. Quand la cubique se réduit aux trois côtés d'un triangle ABC, il existe un seul point, le *point de Lemoine,* dont la conique polaire est un cercle; celui-ci est circonscrit au triangle ABC.

Donc, *si, par le point de Lemoine* K *d'un triangle* ABC, *on mène une sécante variable rencontrant les côtés en des points* M, N, P, *le produit des segments* KM, KN, KP *est à leur somme algébrique dans un rapport constant.*

Ce rapport est la puissance du point de Lemoine relativement au cercle de Lemoine.

Car, pour l'évaluer, menons la sécante parallèle à BC et rencontrant les côtés du triangle AB, AC, BC, respectivement en R, en S, et à l'infini; le rapport considéré est le rectangle KR.KS.

Remarquons en passant que si l'on mène, par K, des parallèles aux trois côtés du triangle, le raisonnement des nos 1 et 2 conduit rapidement à la propriété fondamentale du cercle de Lemoine.

II.

8. Lorsque le point O, ayant pour conique polaire un cercle est unique, il jouit de quelques propriétés, que nous allons établir.

Les énoncés nous ont été communiqués par M. Servais, professeur à l'Université de Gand.

Le point O est à l'intersection des droites

$$\delta \equiv \frac{d^2f}{dx_1\, dx_2} = 0.$$

$$\delta_1 = D - D_1 \equiv \frac{d^2f}{dx_1^2} - \frac{d^2f}{dx_1^2} = 0.$$

Mais l'équation de la poloconique de la droite de l'infini est

$$(6)\qquad \left(\frac{d^2f}{dx_1\,dx_2}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx_1^2}\,\frac{d^2f}{dx_2^2} \equiv \delta^2 - \mathrm{DD}_1 = 0;$$

donc δ est la corde des contacts des tangentes D et D_1 à cette poloconique; par suite, la polaire du point O est la conjuguée harmonique de δ_1 relativement aux droites D et D_1, et cette polaire de O, par rapport à la poloconique de la droite de l'infini est représentée par

$$(7)\qquad \mathrm{D} + \mathrm{D}_1 \equiv \frac{d^2f}{dx_1^2} + \frac{d^2f}{dx_2^2} = 0.$$

Mais cette égalité exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la conique polaire d'un point (x_1, x_2, x_3) soit une hyperbole équilatère; elle est donc l'équation du lieu des points dont les coniques polaires sont des hyperboles équilatères.

Donc *la polaire du point O par rapport à la poloconique de la droite de l'infini est le lieu des points dont les coniques polaires sont des hyperboles équilatères.*

9. Les termes du second degré en x_1^2, x_2^2 de la conique polaire d'un point (y_1, y_2, y_3) sont

$$x_1^2\,\frac{d^2f}{dy_1^2} + 2x_1x_2\,\frac{d^2f}{dy_1\,dy_2} + x_2^2\,\frac{d^2f}{dy_2^2}.$$

Ils déterminent les directions asymptotiques, réelles ou imaginaires, de la conique; si ces directions doivent faire entre elles un angle V, on a

$$(8)\qquad \operatorname{tang}^2 \mathrm{V} = 4\,\frac{\left(\dfrac{d^2f}{dy_1\,dy_2}\right)^2 - \dfrac{d^2f}{dy_1^2}\,\dfrac{d^2f}{dy_2^2}}{\left(\dfrac{d^2f}{dy_1^2} + \dfrac{d^2f}{dy_2^2}\right)^2}.$$

En regardant, dans cette équation, les y comme des variables, on a le lieu des points dont les coniques polaires sont des courbes semblables. La forme de l'équation montre que ce lieu est une conique ayant, avec la courbe

$$\left(\frac{d^2f}{dy_1\,dy_2}\right)^2 - \frac{d^2f}{dy_1^2}\frac{d^2f}{dy_2^2} = 0,$$

un double contact, sur la droite

$$\frac{d^2f}{dy_1^2} + \frac{d^2f}{dy_2^2} \equiv D + D_1 = 0.$$

Donc *le lieu des points dont les coniques polaires sont semblables est une conique ayant un double contact avec la poloconique de la droite de l'infini, sur la polaire du point* O *relative à cette poloconique.*

10. Remarquons ici que la poloconique de la droite de l'infini partage le plan en deux régions; les points de l'une ont pour coniques polaires des ellipses, ceux de l'autre des hyperboles. Par chacun de ces derniers points, il passe, en général, deux droites réelles, parallèles aux asymptotes de la conique polaire, et telles que leurs points d'intersection avec la cubique ont pour centre des moyennes distances le point considéré O. En effet, si dans la relation (1) on fait $OR_1 = \infty$, on doit avoir $OA + OB + OC = 0$, à moins que l'une des longueurs OA, OB, OC ne soit infinie. Il y a donc exception pour les points dont la conique polaire a une asymptote parallèle à une asymptote de la cubique; ce sont les points situés sur les asymptotes de la cubique.

Cette remarque s'étend sans peine à des courbes d'ordre quelconque.

11. Une question qui a quelque rapport avec celles

dont nous nous occupons ici est la recherche des droites dont les poloconiques sont des cercles.

Étant donnée une droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

l'équation de sa poloconique est

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_3} & u_1 \\ \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} & \dfrac{d^2 f}{dx_2^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_2\, dx_3} & u_2 \\ \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_3} & \dfrac{d^2 f}{dx_2\, dx_3} & \dfrac{d^2 f}{dx_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de cette équation contiennent, au second degré, les quantités u_1, u_2, u_3; la condition que la poloconique soit un cercle s'exprime par deux relations qui contiennent ces coefficients au premier degré, et qui représentent donc deux courbes de seconde classe, si l'on y regarde les u comme variables. Les droites qui ont pour poloconiques des cercles sont les quatre tangentes communes à ces deux courbes de seconde classe.

Représentons en abrégé par

$$(10)\qquad \mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{F} - \mathrm{G} = 0$$

les équations de ces deux dernières coniques; la condition que la poloconique d'une droite (u_1, u_2, u_3) soit une hyperbole équilatère est

$$(11)\qquad \mathrm{F} + \mathrm{G} = 0;$$

c'est aussi l'équation, en coordonnées tangentielles u, de l'enveloppe des droites qui ont pour poloconiques des hyperboles équilatères; la courbe représentée par l'équation (11) est aussi de seconde classe.

III.

12. On a vu, dans le § I qu'il existe une infinité de points en ligne droite dont les coniques polaires sont des cercles, dans les cubiques caractérisées par la relation

$$(4) \qquad k\frac{d^2 f}{dx_1\,dx_2} = \frac{d^2 f}{dx_1^2} - \frac{d^2 f}{dx_2^2}.$$

Cette relation continue à être vérifiée si l'on passe à d'autres axes coordonnés rectangulaires, car les conditions pour qu'une équation du deuxième degré représente un cercle ne varient pas pendant ce changement.

Les directions asymptotiques de la cubique s'obtiennent en égalant à zéro l'ensemble des termes du troisième degré en x_2 et x_1. Cette équation en $x_2 : x_1$ a toujours une racine réelle, et, si l'on prend, pour axe des x_1, la direction correspondante, le terme en x_1^3 disparaît ; la courbe a une équation de la forme suivante :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_2^3 + 3a_1 x_1 x_2^2 + 3a_2 x_1^2 x_2 + 3b_1 x_2^2 x_3 + 6b_2 x_1 x_2 x_3 \\ & \qquad + 3b_3 x_1^2 x_3 + 3c_1 x_2 x_3^2 + 3c_2 x_1 x_3^2 + c_3 x_3^3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les directions asymptotiques, autres que l'axe des x_1, sont données par

$$(13) \qquad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 3a_1\frac{x_2}{x_1} + 3a_2 = 0.$$

Mais la condition (4) équivaut à

$$(14) \qquad \frac{-a_1}{a_2} = \frac{a_2 - 1}{a_1} = \frac{b_3 - b_1}{b_2} = k.$$

Appelons $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\beta$ les racines de l'équation (13); l'égalité des deux premiers rapports (14) donne

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \frac{3 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta},$$

ou, après quelques calculs,

(15) $$\cot\alpha - \cot\beta = \cot(\alpha - \beta).$$

Cette égalité est impossible pour des valeurs réelles de α et β; d'ailleurs on voit directement, en vertu de la première des relations (14), que les racines de l'équation (13) sont imaginaires.

D'autre part, la relation (4) exprime que la poloconique de la droite de l'infini, représentée par

$$\left(\frac{d^2f}{dx_1\,dx_2}\right)^2 = \frac{d^2f}{dx_1^2}\,\frac{d^2f}{dx_2^2},$$

dégénère en deux droites. Donc toutes les droites polaires des points de l'infini passent par un même point et les asymptotes de la cubique sont concourantes.

En résumé, la condition (4) exprime que *les cubiques considérées ont trois asymptotes concourantes, dont une réelle et deux imaginaires conjuguées, ces dernières faisant avec la première des angles* α *et* β *tels que*

$$\cot(\alpha - \beta) = \cot\alpha - \cot\beta.$$

13. La condition (4) n'exprime rien de plus, c'est-à-dire que les cubiques jouissant des propriétés que l'on vient d'énoncer satisfont à ladite condition ou aux relations équivalentes (13).

En effet, d'abord, par un calcul inverse, l'égalité (15) conduit à la première des relations (13).

Ensuite, si l'on fait, dans l'équation de la courbe, $x_2 = k_1 x_1 + t_1 x_3$ et $x_2 = k_2 x_1 + t_2 x_3$, k_1 et k_2 étant les racines de l'équation (12), on sait, d'après la théorie générale des asymptotes, qu'elles seront déterminées par les valeurs de t_1 et t_2 qui annulent le terme en x_1^2; l'asymptote réelle est $x_2 = t_3 x_3$, et t_3 se détermine de la même manière. Un calcul assez long montre que si les trois asymptotes concourent, la seconde des relations (13) est vérifiée; on simplifie un peu les écritures en prenant l'asymptote réelle pour axe des x_1; néanmoins le développement de ce calcul est sans intérêt.

14. Les cubiques considérées dans ce paragraphe jouissent encore de la propriété suivante.

Si O est le point commun aux droites

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{dx_2^2} = 0,$$

la conique polaire de ce point dégénère en deux droites dont l'une est à l'infini, et dont l'autre est l'axe radical des coniques polaires circulaires, ce qui se vérifie par un calcul facile.

Ensuite, *les coniques polaires des points d'une droite quelconque passant par* O *sont homothétiques.*

Car toute droite passant par O est la polaire de quatre points situés sur la conique polaire de O; donc deux de ces points sont à l'infini; les coniques polaires de tous les points de la droite en question passent donc par les deux mêmes points à l'infini et sont homothétiques.