NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DUPORCQ

Agrégation des sciences mathématiques; concours de 1898. Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 285-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__285_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS DE 1898. — SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES [1];

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

Désignons par ω le point dont les trois coordonnées sont égales à l'unité : les points ω et P sont évidem-

[1] *Voir* l'énoncé, 1898, p. 424.

ment conjugués par rapport à toutes les quadriques (formant un réseau ponctuel) qui divisent harmoniquement le segment MM' et qui admettent les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

1° Parmi ces quadriques, il en est une qui contient la droite Δ, déterminée par M et M' : le point P est donc dans le plan polaire Π du point ω relativement à cette quadrique; ce plan est donc le lieu du point P, quand M et M' se déplacent, indépendamment l'un de l'autre, sur Δ.

Si, maintenant, M étant fixe sur Δ, M' se déplace seul sur cette droite, les points M et M' ne cessent pas de rester conjugués relativement à toutes les quadriques tangentes en M à Δ; celles de ces quadriques qui sont, de plus, symétriques par rapport aux axes de coordonnées forment évidemment un faisceau ponctuel : le plan polaire du point ω relativement à ces quadriques passe donc par une droite fixe, D, du plan Π, qui constitue alors le lieu du point P.

A deux positions M_1 et M_2 de M sur Δ correspondent ainsi dans le plan Π deux droites D_1 et D_2, dont le point de concours correspond précisément au système des deux points M_1 et M_2. Si M_1 et M_2 tendent à se confondre, il en est de même des droites D_1 et D_2, dont le point de rencontre tend ainsi à devenir un point de l'enveloppe des droites D. Cette enveloppe est donc le lieu du point P, quand M et M' décrivent la droite D en restant confondus.

Parmi les quadriques tangentes en M à Δ, et admettant pour trièdre principal celui des axes de coordonnées, il existe un cône, et la droite D se trouve dans le plan polaire du point ω par rapport à ce cône; les diverses droites D, correspondant aux diverses positions de M, sont donc les traces sur le plan Π des plans polaires du point ω par rapport aux cônes qui ont pour axes les axes de coordonnées, et sont tangents au plan $O\Delta$; ces cônes forment évidemment un faisceau tangentiel, et l'enveloppe des plans polaires du point ω est donc un cône du second degré, tangent aux plans de coordonnées; l'enveloppe de la droite D est, par suite, une conique du plan Π, tangente aux traces des plans de coordonnées; on verrait de même qu'elle touche le plan de l'infini, en considérant les cylindres du second degré qui touchent la droite Δ et admettent pour plans principaux deux des plans de coordonnées : cette enveloppe est donc une parabole.

2° et 3° Supposons maintenant que M et M′ décrivent indépendamment l'un de l'autre une même conique Ω. Considérons un plan quelconque Q : il n'existe qu'une quadrique Σ, symétrique par rapport aux axes et telle que le point ω soit le pôle du plan Q : aux couples de points M et M′ de Ω qui sont conjugués à Σ, correspondent, d'après ce qui précède, des points P du plan Q; quant à l'enveloppe des cordes MM′ ainsi obtenues, qui doivent être divisées harmoniquement par la quadrique Σ, c'est, comme on sait, une conique, Γ. A toute section plane de la surface S, décrite par P, correspond ainsi une conique Γ; aux sections, par deux plans Q et Q′, correspondent ainsi deux coniques Γ et Γ', qui ont quatre tangentes communes; les quatre systèmes de points qu'elles déterminent sur Ω fournissent quatre points de S, situés à la fois sur Q et Q′, c'est-à-dire sur leur droite commune; par suite, la surface S est du quatrième degré.

C'est d'ailleurs une surface de Steiner, car il suffit de poser

$$\lambda\lambda' = u, \qquad \lambda + \lambda' = v$$

pour voir que les coordonnées de ses points sont des fonctions rationnelles du second degré de ces deux nouveaux paramètres. A toute section plane de S correspondra une relation du second degré, entre u et v, qui exprimera que les points M et M' sont sur une même tangente à la conique Γ, que nous avons définie géométriquement tout à l'heure.

Les diverses coniques Γ, correspondant aux divers plans de l'espace, dépendent de trois paramètres arbitraires, et sont telles que, si l'on choisit arbitrairement deux d'entre elles, toutes celles du faisceau tangentiel qu'elles déterminent appartiennent à cette famille de coniques (car on obtient ainsi les coniques qui correspondent aux sections de S par des plans issus d'une même droite). L'équation tangentielle de ces coniques est donc de la forme

$$\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 + \lambda_4\Gamma_4 = 0.$$

Elles sont harmoniquement inscrites aux coniques d'un certain faisceau ponctuel. Parmi ces coniques Γ, il en existe une infinité qui se décomposent en deux points, deux à deux conjugués aux coniques du faisceau ponctuel envisagé : ces points se correspondent donc deux à deux dans une transformation du second ordre, qui est définie, comme on sait, par la donnée de quatre couples de points homologues. Or, on obtient évidemment quatre de ces couples en considérant les points où la conique Ω coupe les plans de coordonnées et le plan de l'infini. Si, en effet, l'un des deux points M et M' qui définissent le point P vient dans un des plans de coordonnées ou dans le plan de l'infini, il en est évidemment de même du point P : les points de S situés, par exemple, dans le plan des YZ correspondent donc aux cordes de Ω qui pivotent autour de chacun des points où Ω perce ce plan. On les obtiendra en prenant pour λ les racines de l'équation

$$a_2 \lambda^2 + 2 a_1 \lambda + a_0 = 0$$

et en laissant λ arbitraire. Leur lieu se compose donc visiblement de deux coniques. On obtient de même deux coniques dans les autres plans de coordonnées et dans le plan de l'infini.

Considérons maintenant deux points quelconques, μ et μ′, se correspondant dans la transformation du second ordre définie par les quatre couples que nous venons d'envisager; aux cordes de Ω, passant par ces points, correspondent les points d'une certaine section plane de S. Or, si la droite MM′ passe par μ, les paramètres λ et λ′ sont liés entre eux par une relation homographique involutive ou, ce qui revient au même, u et v par une relation linéaire; les coordonnées de P sont, par suite, des fonctions rationnelles du second degré d'un seul paramètre, et il décrit donc une conique. A l'ensemble des points μ et μ′ correspond donc une section plane qui se décompose en deux coniques.

On peut choisir arbitrairement le point μ, c'est-à-dire la relation involutive entre λ et λ′; le point μ′ est alors bien défini, en général. Si l'on suppose le point μ sur la conique Ω, il lui correspond de même une conique de la surface : nous verrons tout à l'heure à quoi elle est assujettie.

Dans toute transformation du second ordre, il existe, comme on sait, quatre points qui coïncident avec leurs réciproques; à ces couples doubles correspondent quatre plans tangents à S en tous les points d'une même conique.

Les points de rencontre des côtés opposés du quadrangle formé par ces quatre points sont tels que le conjugué de chacun d'eux est indéterminé sur la droite qui joint les deux autres : soient α, β, γ ces points, et α' un point quelconque de la droite $\beta\gamma$. A l'ensemble $\alpha\alpha'$ correspond une section plane de S, et, quand α' décrit $\beta\gamma$ on obtient ainsi diverses sections planes ayant une partie commune qui correspond au point α : cette partie commune ne peut être qu'une droite, qui est une ligne double de la surface, puisque tout plan passant par cette droite ne coupe en outre S que suivant une conique. Ainsi, aux points α, β, γ correspondent trois droites doubles de la surface : elles forment les arêtes d'un trièdre dont les faces correspondent aux couples (α, β), (β, γ) et (γ, α). Le point commun à ces trois droites est un point triple de S.

Les tangentes menées de α aux diverses coniques Γ forment évidemment une involution, puisque, d'après leur définition même, ces coniques doivent être conjuguées à deux droites fixes issues de α; par suite, toutes les coniques Γ tangentes à une même droite issue de α, le seront à une seconde; or, à ces coniques correspondent sur S des sections planes assujetties seulement à passer par un certain point de la droite double A; ce point correspond donc à deux cordes distinctes issues de α : c'est pourquoi il est double. De même, le point triple correspond aux trois couples de points interceptés sur la conique Ω par les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$.

On peut enfin remarquer que deux coniques quelconques de S ont un point commun; il correspond à la corde de Ω qui passe par les deux points auxquels correspondent ces coniques.

Si les points M et M' décrivent Ω en restant confondus, le point P décrit sur S une courbe gauche du quatrième degré, E; en effet, la conique Ω et une quelconque des coniques Γ ont quatre tangentes communes, auxquelles correspondent quatre points d'un même plan situés sur cette courbe. Si la conique Γ touche Ω, deux de ces tangentes communes se confondent, et par suite aussi deux des points où le plan Q coupe la courbe gauche. Si, en particulier, Γ se décompose en deux points, dont l'un est sur Ω, la conique correspondant à ce dernier est tangente à la courbe E. Celle-ci est donc bitangente aux plans de coordonnées et au plan de l'infini.

Si Γ est bitangente à Ω, la relation entre λ et λ' se réduit, comme on sait, à une relation homographique : à ce cas correspond la section de S par un plan bitangent à E.