Nouvelles annales de mathématiques

Antoine Pleskot

Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réelles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 301-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__301_0>

[A3g]

LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION N'AYANT QUE DES RACINES RÉELLES;

PAR M. ANTOINE PLESKOT,
Professeur à l'École royale de Plzeň (Bohême).

Nous nous proposons de montrer dans cette Note comment, à l'aide de la théorie des maxima et des minima, on peut déterminer les limites des racines d'une équation qui n'a que des racines réelles.

Soit

$$(1) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation n'ayant que des racines réelles.

Désignons la somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de cette équation par s_k, de sorte que

$$s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k.$$

On sait que s_k peut s'exprimer rationnellement en fonction des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Considérons maintenant $n - 2$ racines, à savoir x_2, $x_3, \ldots, x_{n-1}$, comme des variables indépendantes, et considérons par contre les deux restantes x_1 et x_n comme fonctions des autres, définies par les deux équations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s_1, \\ x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k} + \ldots + x_n^{2k} = s_{2k}, \end{cases}$$

dans lesquelles s_1 et s_{2k} sont des constantes données.

Nous allons chercher à trouver le système de valeurs de $x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour lesquelles la fonction de x_n ainsi définie devient un maximum ou un minimum.

En effectuant la différentiation, on aura

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + \ldots + dx_n = 0,$$
$$x_1^{2k-1}\,dx_1 + x_2^{2k-1}\,dx_2 + x_3^{2k-1}\,dx_3 + \ldots + x_n^{2k-1}\,dx_n = 0,$$

relations d'où l'on déduit, en éliminant dx_1,

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} & dx_2(x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + dx_3(x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + \ldots \\ & \qquad + dx_n(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}) = 0. \end{aligned}\right.$$

On a donc, pour le système spécial de valeurs de x_2, x_3, ..., x_{n-1} dans lequel x_n devient soit un maximum soit un minimum, les équations suivantes :

$$x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,\quad x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,\quad x_{n-1}^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,$$

ou, puisqu'il s'agit de valeurs réelles, les équations

$$(\gamma)\qquad x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}.$$

On doit joindre ces $n-2$ équations aux deux équations (α) pour déterminer les quantités encore inconnues x_1 et x_n ; de là suit le système

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{aligned} (n-1)x_1 + x_n &= s_1, \\ (n-1)x_1^{2k} + x_n^{2k} &= s_{2k}, \end{aligned}\right.$$

dont on peut tout de suite tirer les quantités x_1 et x_n.

Il reste encore à montrer quand x_n devient le maximum et quand il devient le minimum. Pour cela déterminons d^2x_n.

Si l'on différentie (β), on aura

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n} (x_\nu^{2k-1} - x_1^{2k-1})\,d^2x_\nu$$
$$+ (2k-1)\sum_{\nu=2}^{\nu=n} (x_\nu^{2k-2}\,dx_\nu - x_1^{2k-2}\,dx_1)\,dx_\nu = 0.$$

Mais, pour le système spécial x_1, ..., x_n, on a

$$dx_n = 0,$$

et, si l'on se sert des équations (γ), on aura tout d'abord l'équation

$$(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1})\,d^2x_n + (2k-1)x_1^{2k-2}\left(\sum_{\nu=2}^{\nu=n-1} dx_\nu^2 - dx_1 \sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu\right) = 0.$$

Or, à cause de l'équation

$$\sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu = - dx_1,$$

notre résultat doit prendre la forme

$$d^2x_n = -(2k-1)x_1^{2k-2}\,\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n-1} dx_\nu^2}{x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}}.$$

Le numérateur du second membre est toujours positif; d^2x_n devient donc positif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est négatif, et il devient négatif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est positif.

Il s'ensuit que x_n a la plus grande valeur quand $x_n > x_1$ et la plus petite quand $x_n < x_1$.

La résolution de l'équation (δ) nous donne deux systèmes de valeurs des quantités x_1 et x_n, comme il va être démontré. Pour le premier système on a $x_n > x_1$, et alors x_n est la racine la plus grande, puisque toutes les autres égalent x_1; pour la deuxième on a $x_n < x_1$, et alors x_n est la plus petite racine.

Il nous reste encore à tirer du système (δ) les valeurs de x_1 et de x_n. Le système aura une forme bien simple si $s_1 = 0$.

Transformons donc l'équation (1) en faisant la substitution

$$x = y - \frac{a_1}{n}.$$

Elle deviendra

$$\psi(y) = y^n + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \ldots + a_n = 0.$$

Désignons maintenant la somme des puissances k des racines de cette équation par σ_k, le système (δ) se transformera en

$$\begin{aligned} (n-1)y_1 \quad + y_n \quad &= 0, \\ (n-1)y_1^{2k} + y_n^{2k} &= \sigma_{2k}, \end{aligned}$$

parce que $\sigma_1 = 0$.

Il résulte de ces équations

$$\begin{aligned} y_n &= \pm(n-1)\sqrt[2k]{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}}, \\ y_1 &= \mp \qquad \sqrt{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n+1)^{2k-1}]}}. \end{aligned}$$

La valeur y_n est donc positive pour le signe supérieur et négative pour le signe inférieur.

La valeur positive de y_n fait atteindre à y_n son maximum et la valeur négative son minimum.

La valeur la plus grande et la plus petite que x_n puisse atteindre sont donc

$$x_n = y_n - \frac{a_1}{n} = -\frac{a_1}{n} \pm (n-1)\sqrt{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}}.$$

Le signe supérieur correspond au maximum et le signe inférieur au minimum.

σ_{2k} peut aussi s'exprimer par s_{2k}. On a les équations

$$y = x + \frac{a_1}{n},$$

et

$$\sum y^{2k} = \sigma_{2k} = \sum \left(x + \frac{a_1}{n}\right)^{2k};$$

donc

$$\sigma_{2k} = \frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{n^{2k}}.$$

En introduisant les valeurs s_k, les limites des racines de l'équation (1) prennent donc, pour la limite inférieure, la forme

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{[1+(n-1)^{2k-1}](n-1)}},$$

et, pour la limite supérieure,

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{[1+(n-1)^{2k-1}](n-1)}}.$$

Dans le cas spécial où $k = 1$, on aura les limites

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{ns_2 - s_1^2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{ns_2 - s_1^2}{n-1}},$$

qui, si au lieu de s_1 on écrit a_1 et $a_1^2 - 2a_2$ au lieu de s_2, prennent les formes connues

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}.$$

Note. — L'auteur a publié une autre méthode élémentaire qui aboutit aux mêmes limites, dans des Comptes rendus (*Sitzungsberichte*) de la Société royale des Sciences, à Prague, en 1897.