Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 383-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__383_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1768.

(1897, p. 244.)

L'expression

$$\begin{aligned} A = (m-1)(m-2)\ldots(m-k) \\ -\frac{n}{1}(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)+\ldots \\ +(-1)^{n-1}\frac{n}{1}(m-k)\ldots(m-2k+1) \\ +(-1)^n(m-k-1)\ldots(m-2k). \end{aligned}$$

est indépendante de m *pour* $k=n$, *ou* $k<n$,

Dans le premier cas $A = n\,!$, *dans le second* $A = 0$.

(GENTY.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Posons

$$k = n \qquad \text{et} \qquad (m-1)(m-2)\ldots(m-n) = f(m),$$

l'expression proposée peut s'écrire

$$\begin{aligned} A = f(m) - \frac{n}{1}f(m-1)+\ldots \\ +(-1)^\mu \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{\mu\,!}f(m-\mu)+\ldots \\ +(-1)^n f(m-n). \end{aligned}$$

Développant les $f(m-\mu)$ par la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} A = f(m)\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}+(-1)^n\right] \\ +\sum_{\mu=1}^{\mu=n}(-1)^\mu\frac{f^{(\mu)}(m)}{\mu\,!}\left[-\frac{n}{1}1^\mu+\frac{n(n-1)}{1.2}2^\mu-\ldots \right. \\ \left. +(-1)^{n-1}\frac{n}{1}(n-1)^\mu+(-1)^n n^\mu\right]. \end{aligned}$$

Tous les coefficients de $f(m)$ et de ses dérivées successives sont nuls, à l'exception du dernier que l'on obtient en faisant $\mu = n$, et qui se réduit à $n!$.

On remarquera, en effet, que le coefficient de $f(m)$ est égal à la valeur que prend le développement de $(1-x)^n$ pour $x=1$. Celui de $-\frac{f'(m)}{1}$ est égal à la dérivée de $(1-x)^n$, pour $x=1$; celui de $\frac{f^{(2)}(m)}{1.2}$ s'obtient en multipliant par x la dérivée de $(1-n)^n$ prenant la dérivée du produit et faisant dans le résultat $x=1$. En général, le coefficient de $\frac{(-1)^\mu f^{(\mu)}(m)}{\mu!}$ est égal à la valeur que prend, pour $x=1$, le polynome

$$\begin{aligned}&-n(1-x)^{n-1}+\mathrm{B}x(1-x)^{n-2}-\mathrm{C}x^2(1-x)^{n-3}+\ldots\\&+(-1)^\mu n(n-1)\ldots(n-\mu+1)x^{\mu-1}(1-x)^{n-\mu},\end{aligned}$$

valeur qui sera nulle pour $\mu<n$, mais qui devient $(-1)^n n!$ pour $\mu=n$. Alors le dernier terme du développement, le seul qui subsiste,

$$\frac{(-1)^n f^{(n)}(m)}{n!}(-1)^n n! = n!,$$

car

$$\frac{f^{(n)}(m)}{n!}=1.$$

Question 1769.

(1897, p. 291.)

Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes; les circonférences de cercles, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Prenant pour pôle le foyer, pour axe polaire la perpendiculaire menée du foyer à la directrice correspondante, l'équation de la conique donnée sera

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Le rayon vecteur ρ_1 qui complète la corde $\rho + \rho_1$ est donné par la relation

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

et le lieu des centres des cercles de diamètre $\rho + \rho_1$ aura pour équation

$$r = \frac{\rho_1 - \rho}{2} = \frac{pe\cos\theta}{1 - e^2\cos^2\theta},$$

qui, en coordonnées ordinaires, s'écrira

$$x^2(1 - e^2) + y^2 - pex = 0.$$

Cette relation représente une ellipse pour $e < 1$, une parabole pour $e = 1$, et une hyperbole pour $e > 1$. Or le lieu des centres des cercles variables tangents à deux circonférences données est une ellipse, si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre, une parabole, si le rayon de l'une d'elles est infini, une hyperbole, si elles sont extérieures l'une à l'autre.

Autres solutions de MM. AUTON ALEXANDER, E.-N. BARISIEN, G. CARDOSO-LAYNES, DULIMBERT, E. MALO.

Question 1771.

(1897, p. 340.)

Soient ABC *un triangle équilatéral,* (S) *le cercle inscrit dans ce triangle, abc un triangle équilatéral inscrit dans le cercle* (S) :

1° *Les droites* Aa, Bc, Cb *se coupent en un même point* α ;

2° *Quand le triangle abc se meut dans le cercle* (S), *le point* α *décrit une hypocycloïde à trois rebroussements ;*

3° *Construire la tangente au point* α *en partant de ce mode de génération de la courbe.* (GENTY.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, R le rayon de ce cercle, φ l'angle $\widehat{aOA}$.

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine en O, OA étant l'axe des x. Le rayon du cercle (S) étant $\frac{R}{2}$, on a immédiatement pour les coordonnées des six points A, B, C, a, b, c.

$$
\begin{array}{lll}
\text{A.} & x = R, & y = 0, \\
\text{B.} & x = -\dfrac{R}{2}, & y = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}, \\
\text{C.} & x = -\dfrac{R}{2}, & y = -\dfrac{R\sqrt{3}}{2}, \\
a. & x = \dfrac{R}{2}\cos\varphi, & y = \dfrac{R}{2}\sin\varphi, \\
b. & x = -\dfrac{R}{2}\cos(60^\circ - \varphi), & y = \dfrac{R}{2}\sin(60^\circ - \varphi), \\
c. & x = -\dfrac{R}{2}\cos(60^\circ + \varphi), & y = -\dfrac{R}{2}\sin(60^\circ + \varphi).
\end{array}
$$

1° L'équation de la droite Aa est

$$
\begin{vmatrix}
x & y & 1 \\
R & 0 & 1 \\
R\cos\varphi & R\sin\varphi & 2
\end{vmatrix} = 0,
$$

ou, en développant le déterminant,

$$
(1) \qquad x\sin\varphi + y(2 - \cos\varphi) - R\sin\varphi = 0.
$$

L'équation de la droite Bc s'écrit

$$
\begin{vmatrix}
x & y & 1 \\
-R & R\sqrt{3} & 2 \\
R\cos(60^\circ + \varphi) & R\sin(60^\circ + \varphi) & -2
\end{vmatrix} = 0
$$

ou

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
& 2x\left[\sqrt{3} + \sin(60^\circ + \varphi)\right] - 2y\left[\cos(60^\circ + \varphi) - 1\right] \\
& \quad + R\left[\sin(60^\circ + \varphi) + \sqrt{3}\cos(60^\circ + \varphi)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation de la droite Cb est de même

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
& 2x\left[\sqrt{3} + \sin(60^\circ - \varphi)\right] + 2y\left[\cos(60^\circ - \varphi) - 1\right] \\
& \quad + R\left[\sin(60^\circ - \varphi) + \sqrt{3}\cos(60^\circ - \varphi)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

En retranchant les équations (2) et (3), on retombe sur l'équation (1). Donc les droites (1), (2) et (3) concourent en un point α.

2° Pour trouver les coordonnées de ce point α, ajoutons (2) et (3), il vient

$$(4) \qquad x(2+\cos\varphi)+y\sin\varphi+\mathrm{R}\cos\varphi=0.$$

En résolvant (1) et (4), on trouve pour les cordonnées de α,

$$(5) \qquad x=\frac{\mathrm{R}}{3}(\cos 2\varphi-2\cos\varphi), \qquad y=\frac{\mathrm{R}}{3}(\sin 2\varphi+2\sin\varphi).$$

Or, si l'on pose $\psi=180°-\varphi$, on a

$$(6) \qquad x=\frac{\mathrm{R}}{3}(2\cos\psi+\cos 2\psi), \qquad y=\frac{\mathrm{R}}{3}(2\sin\psi-\sin 2\psi).$$

Sous cette forme on reconnaît les équations relatives à une hypocycloïde triangulaire dont les trois points de rebroussement sont A, B et C.

L'angle ψ étant l'angle $\widehat{\alpha \mathrm{OA}}$, il en résulte que les droites $\mathrm{O}\alpha$ et $\mathrm{O}a$ sont également inclinées sur OA.

3° Construisons le cercle de rayon $\frac{\mathrm{R}}{3}$ qui passe par α et est tangent au cercle ABC. Si de O comme centre avec le rayon $\frac{2\mathrm{R}}{3}$ on décrit un cercle, si de α comme centre avec le rayon $\frac{\mathrm{R}}{3}$ on décrit un autre cercle, ces deux cercles se rencontrent en deux points I et I'. On voit, sans ambiguïté, que celui de ces deux points qui est situé entre α et A est le centre I du cercle Σ passant par α, ayant $\frac{\mathrm{R}}{3}$ pour rayon, tangent au cercle ABC. Ce cercle Σ dans son roulement intérieur sur le cercle ABC, en partant du point A, décrit le point α, après avoir tourné de l'angle 3ψ. La droite OI rencontre le cercle ABC au point P (on prend celui des deux points d'intersection tel que I soit situé entre O et P). La normale à l'hypocycloïde au point α est donc la droite $\alpha\mathrm{P}$ qui unit le point α au point de contact P des cercles Σ et ABC.

Remarque. — Il est évident que les droites Bb, Ac et Ca se coupent en un point α, et que les droites Cc, Ab et Ba se coupent en un point γ. Ces deux points β et γ sont situés sur l'hypocycloïde (6).

On verrait aussi que *les droites* $A\alpha$, $B\beta$ *et* $C\gamma$ *forment un triangle équilatéral.*

Autre solution de M. DULIMBERT.