CH. BIOCHE

Sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 38-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__38_1>

QUESTIONS. — On voit facilement comment par le moyen des formules indiquées on peut aborder l'étude d'une foule de problèmes relatifs aux différentes relations métriques entre les éléments de la figure que nous avons étudiée, et comment la combinaison même de ces formules peut donner quelques propriétés spéciales de figures particulières (en prenant pour m, p, q des valeurs particulières).

Par exemple étudier quand on a

$$\frac{A_1C}{AB} = \frac{B_1A}{BC} = \frac{C_1B}{CA},$$

$$A_1A = AB + A_1C, \ldots,$$

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{A_1D}.\overline{A_1C},$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BP}{BE} = \frac{CP}{CF} = k,$$

$$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1,$$

$$PD = PE = PF = \ldots \text{[1]}.$$

Si le point P *est le centre de gravité du triangle* ABC, *on a*

$$\left(\frac{b^2+c^2}{AA_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+c^2}{BB_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{CC_1}\right)^2 = 3(a^2+b^2+c^2).$$

[L²6a]

SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A UN TÉTRAÈDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que le triangle formé par trois points d'une conique et le triangle formé par les tangentes en ces

---

[1] *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. IV, p. 97 (1041).

points sont homologiques. Il est naturel de se demander si le tétraèdre formé par quatre points d'une quadrique non développable et le tétraèdre formé par les plans tangents sont homologiques. Je vais montrer que cela n'a pas toujours lieu, mais que sur une quadrique donnée, non développable, on peut toujours trouver des systèmes de quatre points présentant cette particularité.

1. Si le tétraèdre de référence a pour faces

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 = 0, \qquad X_4 = 0,$$

l'équation d'une quadrique circonscrite peut s'écrire

$$\Sigma A_{hk} X_h X_k = 0,$$

h et k prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, mais ne prenant pas tous deux à la fois la même valeur; en outre, je supposerai

$$A_{h,k} = A_{k,h}.$$

Les plans tangents aux différents sommets ont pour équations

$$\begin{aligned}
A_{1,2} X_2 + A_{1,3} X_3 + A_{3,4} X_4 &= 0,\\
A_{2,1} X_1 + A_{2,3} X_3 + A_{2,4} X_4 &= 0,\\
A_{3,1} X_1 + A_{3,2} X_2 + A_{3,4} X_4 &= 0,\\
A_{4,1} X_1 + A_{4,2} X_2 + A_{4,3} X_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Pour que le tétraèdre formé par ces plans soit homologique du tétraèdre de référence, il faut et il suffit que les traces des plans tangents sur les faces du tétraèdre de référence soient dans un même plan ; en particulier, il faut que les plans tangents aux sommets d'une arête coupent l'arête opposée au même point. Or l'arête

$$X_1 = 0. \qquad X_2 = 0$$

coupe les plans tangents correspondants aux points

$$X_1 = X_2 = 0, \qquad A_{1,3}X_3 + A_{1,4}X_4 = 0,$$
$$X_1 = X_2 = 0, \qquad A_{2,3}X_3 + A_{2,4}X_4 = 0.$$

La condition pour que ces points soient confondus est que

$$A_{1,3}A_{2,4} = A_{2,3}A_{1,4}.$$

Si l'on opère de même pour l'arête,

$$X_1 = 0, \qquad X_3 = 0,$$

on trouve

$$A_{2,3}A_{1,4} = A_{1,2}A_{3,4}.$$

2. Les conditions trouvées sont suffisantes, car si l'on pose

$$A_{2,3} = \alpha, \qquad A_{3,1} = \beta, \qquad A_{1,2} = \gamma,$$
$$A_{1,4} = \frac{\beta\gamma}{\delta}, \qquad A_{2,4} = \frac{\gamma\alpha}{\delta}, \qquad A_{3,4} = \frac{\alpha\beta}{\delta},$$

l'équation de la surface peut s'écrire

$$\frac{X_1X_2}{\alpha\beta} + \frac{X_1X_3}{\alpha\gamma} + \frac{X_1X_4}{\alpha\delta} + \frac{X_2X_3}{\beta\gamma} + \frac{X_2X_4}{\beta\delta} + \frac{X_3X_4}{\gamma\delta} = 0,$$

et les traces des plans tangents sont dans le plan

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{X_1}{\alpha} + \frac{X_2}{\beta} + \frac{X_3}{\gamma} + \frac{X_4}{\delta} = 0.$$

Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre de référence aux sommets du tétraèdre circonscrit se coupent au point

$$(h) \qquad \frac{X_1}{\alpha} = \frac{X_2}{\beta} = \frac{X_3}{\gamma} = \frac{X_4}{\delta}.$$

On voit qu'étant donné un tétraèdre, on peut toujours prendre arbitrairement soit le plan d'homologie H, soit le pôle d'homologie *h*; on a une quadrique circonscrite au tétraèdre de référence et inscrite dans un autre, homologique de celui-ci.

3. Si l'on se donne une quadrique non développable Q, on peut trouver sur cette surface des systèmes de quatre points tels que le tétraèdre formé par un de ces systèmes soit homologique du tétraèdre formé par les plans tangents en ces points.

Soient A, B, C trois points pris arbitrairement sur Q (mais non en ligne droite), le plan ABC coupe Q suivant une conique, et les tangentes en A, B, C à cette conique coupent les côtés opposés en trois points situés sur une même droite Δ. Si l'on mène par Δ un plan tangent à Q, soit D le point de contact, le tétraèdre ABCD réalise la condition énoncée, car chaque côté du triangle ABC coupe les plans tangents aux sommets de l'arête opposée au même point, et l'on a vu que ces conditions étaient suffisantes.

On aurait pu se donner le plan d'homologie; alors, on pouvait prendre un des sommets arbitrairement : les autres sont alors sur une conique déterminée, sur laquelle on peut choisir l'un de ces points à volonté, car, si le plan d'homologie est à l'infini, la quadrique Q étant une sphère, le problème revient à trouver quatre points de la sphère formant un tétraèdre régulier.

4. Si l'on considère une quadrique quelconque circonscrite au tétraèdre de référence, les quatre traces des plans tangents aux sommets sur les faces du tétraèdre de référence sont sur une quadrique dont l'équation peut s'écrire

$$A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}X_1^2 + A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,4} + A_{1,4}A_{2,3})X_1X_2 + \ldots,$$

les termes non écrits se déduisant de ceux qui sont écrits par des permutations d'indices. Cette quadrique se réduit à deux plans confondus dans le cas particulier précédemment étudié.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Besançon.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définition de la fonction* Γ. *Démontrer que* $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}$.

PROBLÈME. — *Étant donnés trois axes rectangulaires et un hélicoïde représenté par l'équation*

$$z = K \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

où K *est une constante donnée, calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des* xy *suivant un secteur circulaire ayant son centre au point* O, *ayant pour rayon* a *et pour angle au centre* α.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer avec cinq décimales l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}, \qquad K = 0,43528.$$