PHILIBERT DU PLESSIS

Composition mathématique d'admission à l'École polytechnique en 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 421-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__421_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1899;

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. *Indiquer comment sont situées par rapport au système* $Oxyz$ *des axes de coordonnées rectangulaires les droites* A *et* B *qui ont pour équations*

$$(A) \qquad z = 2, \qquad y + x = 0,$$
$$(B) \qquad z = -2, \qquad y - x = 0.$$

Chercher le lieu des centres S *des sphères tangentes à la fois aux droites* A *et* B. *Ce lieu est une surface* [S] : *la reconnaître et donner ses génératrices rectilignes.*

II. *Constater sur l'équation de* [S] *que* Ox, Oy, Oz *sont des axes de symétrie de cette surface, et montrer que ce résultat pouvait être prévu par la seule connaissance des données du problème.*

III. *De chaque point* x, y, z *de* [S], *on déduit un point* M, *en diminuant l'ordonnée* y *de* $\frac{27}{(2x+1)^2}$.

Écrire l'équation de la surface [M] *ainsi déduite de* [S], *et trouver les droites de la surface.*

IV. *Étudier la forme et les transformations successives des sections de la surface* [M] *par des plans perpendiculaires à* Oz, *et, en particulier, les sections faites par les plans* $z = 0$ *et* $z = 1$, *cette dernière aussi complètement que possible.*

I. Les droites B et A sont les parallèles menées par les points de l'axe Oz, de cotes -2 et $+2$, respectivement à la bissectrice de l'angle xOy et à celle de son supplément.

Les distances du point S aux droites A et B étant égales, on a immédiatement

$$(z-2)^2 + \frac{(y+x)^2}{2} = (z+2)^2 + \frac{(y-x)^2}{2}$$

ou

$$(1) \qquad xy = 4z,$$

qui est l'équation du lieu [S] demandé.

Cette équation représente un paraboloïde hyperbolique équilatère ayant pour sommet l'origine, pour plan tangent en ce point le plan Oxy, et pour plans directeurs les plans Oxz et Oyz. Ses deux systèmes de génératrices rectilignes ont pour équations respectivement

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ \lambda y = 4z, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = \mu, \\ \mu x = 4z. \end{cases}$$

II. Il suffit de remarquer que l'on peut, dans l'équation (1), changer simultanément le signe de deux des coordonnées courantes, pour en conclure que la surface admet les trois axes de coordonnées comme axes de symétrie.

Géométriquement, on peut le voir ainsi :

D'une part, l'axe Oz se confond avec l'axe du paraboloïde et, d'autre part, dans chaque système de génératrices rectilignes, l'un des axes, Ox ou Oy, joue le rôle d'axe de symétrie, puisque ces génératrices le rencontrent et lui sont perpendiculaires.

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, attendu que les données sont symétriques par rapport aux trois axes, chacune des droites A et B étant à elle-même sa propre symétrique par rapport à Oz, et ces deux droites étant symétriques l'une de l'autre par rapport soit à Ox, soit à Oy.

III. L'équation (1) pouvant s'écrire

$$y = \frac{4z}{x},$$

celle de la surface [M] sera

$$(2) \qquad y = \frac{4z}{x} - \frac{27}{(2x+1)^2}$$

ou

$$(2') \qquad x[(2x-1)^2 y - 27] = 4z(2x+1)^2.$$

Si cette surface du quatrième degré possède des génératrices rectilignes, celles-ci seront nécessairement parallèles à des génératrices du cône des directions asymptotiques ayant pour sommet l'origine. Or celui-ci a pour équation

$$x^3 y = 0,$$

c'est-à-dire qu'il se décompose en deux plans : Oyz, pris triplement, et Oxz. Il ne saurait donc y avoir de génératrices de la surface que dans des plans parallèles à l'un ou à l'autre de ces plans de coordonnées.

Si nous coupons la surface par un plan parallèle à Oyz, il la rencontre déjà suivant une droite triple à l'infini. Le reste de l'intersection se réduit donc à une droite. Les équations de cette droite sont, en effet, si l'on se reporte à (2),

$$x = \lambda,$$
$$y = \frac{4z}{\lambda} - \frac{27}{(2\lambda+1)^2}.$$

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, attendu que, la transformation consistant à réduire toutes les abscisses égales d'une même quantité, une génératrice du premier système du paraboloïde [S], dont toutes les abscisses sont égales, doit se transformer en une droite.

La surface [M] du quatrième ordre, possédant ainsi un système infini de génératrices rectilignes, ne saurait, comme on sait, en posséder un second; elle ne saurait même pas, en dehors de ce système, posséder de génératrices isolées. Celles-ci, d'après ce qu'on vient de voir, seraient, en effet, parallèles au plan Oxz. Or, si l'on coupe la surface par un plan parallèle à celui-ci, on obtient, d'après (2'), en outre de la droite à l'infini, la cubique dont l'équation est

$$(2x+1)^2(\mu x - 4z) + 27x = 0.$$

Cette cubique admet pour asymptotes les droites

$$2x+1=0 \qquad \text{et} \qquad \mu x - 4z = 0,$$

et si, pour une certaine valeur de μ, elle se décomposait, les équations de ses asymptotes se mettraient en facteurs dans sa propre équation, ce qui n'a jamais lieu, puisque le terme restant $27x$ est indépendant de μ.

IV. Si l'on coupe la surface [M] par le plan $z=h$, on obtient la quartique Q qui a pour équation

$$(2x+1)^2(xy-4h)+27x=0, \tag{3}$$

et dont les asymptotes, en évidence sur l'équation même, sont les droites

$$x=0,$$
$$y=0,$$
$$2x+1=0,$$

cette dernière étant double. Il en résulte que la quartique a un point triple à l'infini dans la direction de Oy; elle est donc unicursale.

Ces asymptotes restant les mêmes quel que soit h, toute la question revient à examiner la disposition de la courbe par rapport à ces asymptotes pour les différentes valeurs de h.

La méthode des régions, jointe à la considération des deux points où l'axe des x, asymptote, rencontre la courbe à distance finie, suffit, dans tous les cas, à fixer l'allure générale de la courbe.

Convenons tout d'abord de désigner par H l'hyperbole équilatère qui a pour équation

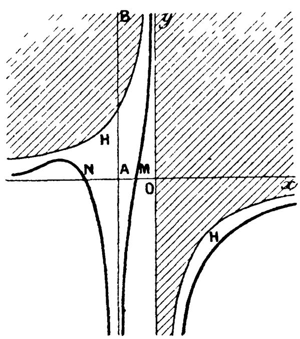
$$xy - 4h = 0,$$

et de désigner par *intérieur* de cette hyperbole la région du plan où se trouve son centre, et par *extérieur* celle où il ne se trouve pas. Cela posé, examinons les divers cas suivants :

1° $h < 0$.

L'hyperbole H a alors la disposition indiquée sur la *fig.* 1.

Fig. 1.



L'équation (3) montre que, pour tout point de la quartique Q, le binome $xy - 4h$ doit être de signe contraire à x. Or, le binome étant positif pour le centre de l'hyperbole confondu avec l'origine, puisque h est négatif, il reste positif dans tout l'intérieur de l'hyperbole et négatif à l'extérieur. Il en résulte que la quartique Q est à l'intérieur de H du côté des x négatifs, à l'extérieur du côté des x positifs, ce qui est indiqué sur la figure par des hachures tracées dans les régions où il n'y a pas de points de Q.

Remarquons maintenant que la quartique coupe l'axe des x aux points où les abscisses sont données par l'équation

$$(4)\qquad 16hx^2 + (16h - 27)x + 4h = 0.$$

Comme on a

$$(5)\qquad (16h - 27)^2 - (16h)^2 = 27(27 - 32h),$$

quantité positive, puisque h est négatif, il en résulte que l'équation a ses deux racines réelles. Leur somme

$$-\left(1 - \frac{27}{16h}\right)$$

étant négative, et leur produit $\frac{1}{4}$ positif, elles sont négatives et, de plus, l'une est supérieure, l'autre inférieure à leur moyenne géométrique $\frac{1}{2}$. Si donc AB est l'asymptote $2x + 1 = 0$, les points M et N où la quartique coupe Ox sont l'un entre O et A, l'autre au delà de A. La connaissance de ces deux points, jointe à celle des régions précédemment déterminées, impose à la courbe Q la forme dessinée en trait gras sur la *fig.* 1.

On voit que cette courbe présente nécessairement un maximum du côté des x négatifs au delà du point N. Peut-elle en offrir d'autres? La dérivée de l'ordonnée est, d'après (2),

$$y' = \frac{-4h}{x^2} + \frac{4 \times 27}{(2x+1)^3}.$$

Pour qu'elle s'annule, il faut que l'on ait

$$-h(2x+1)^3+27x^2=0,$$

équation du troisième degré qui donnera pour la courbe autant de tangentes horizontales qu'elle aura de racines réelles.

Or cette équation peut s'écrire

$$-h\left(\frac{2x+1}{x}\right)^3+\frac{27}{x}=0,$$

ou

$$-h\left(\frac{2x+1}{x}\right)^3+27\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)=0,$$

ou enfin, en posant $\frac{2x+1}{x}=t$,

$$t^3-\frac{27}{h}t+\frac{2\times 27}{h}=0, \tag{6}$$

et l'on a pour cette dernière équation

$$4p^3+27q^2=-4\frac{27^3}{h^3}+27\frac{4\times 27^2}{h^2}=\frac{4\times 27^3}{h^2}\left(1-\frac{1}{h}\right), \tag{7}$$

quantité positive, puisque h est négatif. L'équation n'a donc qu'une racine réelle à laquelle correspond la tangente horizontale déjà trouvée.

2° $h>0$.

Ici, c'est, par rapport à l'hyperbole H, la région intérieure qui est négative et la région extérieure positive. Le raisonnement employé dans le cas de h négatif montre donc que les régions où se trouve la quartique Q sont celles qui n'ont pas de hachures sur la *fig.* 2.

Pour la réalité des points de rencontre de la courbe et de son asymptote Ox, le binome caractéristique est toujours celui dont l'expression (5) a été donnée plus haut.

Comme h est maintenant positif, ce binome est positif si

$$h < \frac{27}{32}.$$

On a alors deux points de rencontre réels M et N. C'est

Fig. 2.

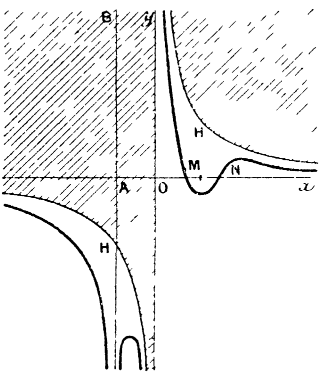
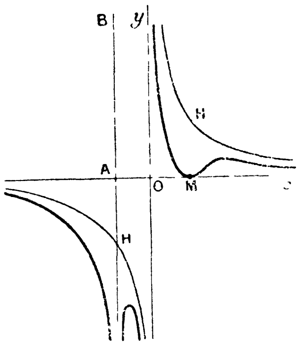


Fig. 2'.



le cas de la *fig.* 2. L'équation (4) montre d'ailleurs que le produit $OM \times ON$ est toujours égal à $\frac{1}{4}$.

Lors donc que

$$h = \frac{27}{32},$$

auquel cas les points M et N se confondent, leur abscisse est égale à $\frac{1}{2}$. C'est le cas de la *fig.* 2'.

Si l'on a

$$h > \frac{27}{32},$$

les points de rencontre avec Ox deviennent imaginaires, et l'on obtient la *fig.* 2''.

Pour ce qui est des tangentes horizontales, elles sont, comme dans le cas de $h < 0$, données par l'équation (6).

La substitution de $-\infty$ et o dans le premier membre de cette équation donnant les signes — et +, il y a nécessairement une tangente horizontale réelle dans l'intervalle, ou, puisque

$$x = \frac{1}{t-2},$$

entre $x = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$. C'est la tangente horizontale à la branche de courbe située entre les asymptotes Oy et AB.

Les deux autres tangentes horizontales seront réelles

Fig. 2″.

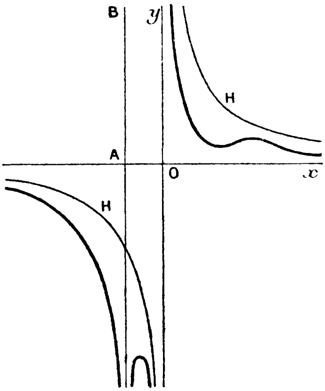
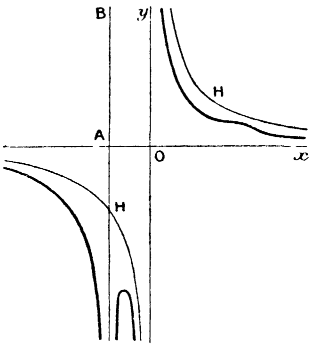


Fig. 2‴.



si le binome caractéristique, dont l'expression (7) est donnée ci-dessus, est négatif, c'est-à-dire si $h < 1$: c'est le cas des *fig.* 2, 2′ et 2″.

Si h est > 1, les deux tangentes horizontales deviennent imaginaires : c'est le cas de la *fig.* 2‴.

Lorsque ces tangentes sont réelles, il en résulte nécessairement l'existence de deux points d'inflexion, l'un entre leurs points de contact, l'autre au delà du second point de contact. Mais ces deux points d'inflexion peuvent persister après la disparition des deux tangentes horizontales, comme le montre la *fig.* 2‴. Cherchons donc à partir de quelle valeur de h ils s'évanouissent.

En dérivant l'expression de y' écrite plus haut, nous avons

$$y'' = \frac{8h}{x^3} - \frac{8 \times 3^4}{(2x+1)^4}.$$

Les abscisses des points d'inflexion sont donc données par l'équation

$$h(2x+1)^4 - 3^4 x^3 = 0.$$

Si nous faisons encore la transformation

$$\frac{2x+1}{x} = t,$$

nous obtenons l'équation

$$(8) \qquad t^4 - \frac{3^4}{h}t + \frac{2 \times 3^4}{h} = 0.$$

Cette équation manquant des deux termes consécutifs en t^3 et en t^2 a nécessairement, en vertu d'un théorème bien connu, deux racines imaginaires. Les deux autres seront réelles tant que h n'atteindra pas la valeur pour laquelle l'équation (8) a une racine double, c'est-à-dire est satisfaite par la racine réelle de sa dérivée

$$4t^3 - \frac{3^4}{h} = 0.$$

L'élimination de t entre ces équations est des plus faciles. Si, après avoir multiplié la seconde par $\frac{t}{4}$, on la retranche de la première, on a, après suppression du facteur $\frac{3^4}{h}$,

$$-\frac{3t}{4} + 2 = 0,$$

d'où

$$t = \frac{8}{3}.$$

Il en résulte d'abord que

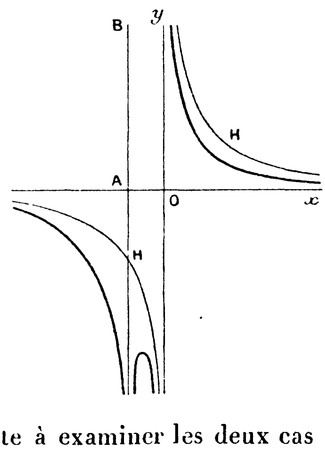
$$x = \frac{1}{\frac{8}{3} - 2} = \frac{3}{2}.$$

Telle est l'abscisse du point où viennent se confondre les deux points d'inflexion. Portant maintenant cette valeur de t dans l'équation dérivée ci-dessus, on a

$$h = \frac{3^7}{2^{11}} = 1,0678\ldots.$$

A partir de cette valeur de h les deux points d'inflexion disparaissent et l'on a la forme indiquée sur la *fig.* 2^{iv}.

Fig. 2^{iv}.



Il nous reste à examiner les deux cas spéciaux prévus par l'énoncé.

3° $h = 0$.

Si, dans l'équation (3), on fait $h = 0$, cette équation se décompose en

$$x = 0$$

et

$$(2x+1)^2y+27=0,$$

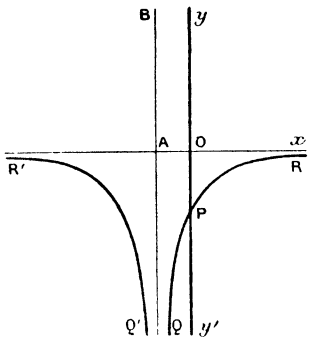
ou

$$y=\frac{-27}{(2x+1)^2}.$$

Par suite, la quartique Q se décompose en l'axe des y et la cubique unicursale dont l'équation vient d'être écrite et qui admet toujours pour asymptotes les droites Ox et $AB(x=-\frac{1}{2})$.

Cette cubique (*fig.* 3) coupe l'axe Oy au point P

Fig. 3.



dont l'ordonnée est $y=-27$. Elle est symétrique par rapport à son asymptote AB.

On peut remarquer que les ordonnées de cette cubique sont les inverses changées de signe de celles de la parabole

$$y=\frac{(2x+1)^2}{27}$$

qui admet AB pour axe et A pour sommet.

En se reportant à l'équation (2), on voit que les diverses formes de la quartique Q s'obtiennent en ajoutant aux ordonnées de cette cubique fixe celles de l'hyperbole variable

$$y = \frac{4h}{x},$$

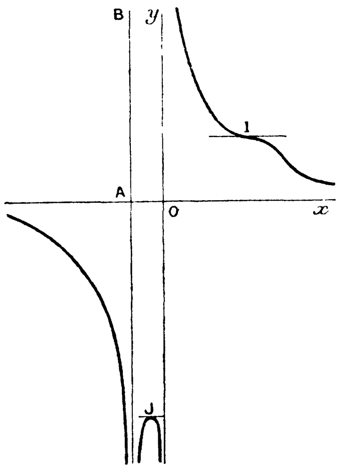
que nous avons désignée par H.

4° $h = 1$.

D'après la discussion faite pour le deuxième cas h étant ici compris entre $\frac{27}{32}$ et 1,06, la forme correspondante de la courbe appartient à l'une des variétés dessinées sur les *fig.* 2″ et 2‴. En réalité, c'est la forme de transition entre ces deux-ci, puisque ce qui les distingue l'une de l'autre, à savoir la réalité des tangentes horizontales, se modifie précisément, comme on l'a conclu de l'expression (7) du binome caractéristique, pour $h = 1$.

Ainsi, pour cette valeur de h, on a donc deux tangentes horizontales confondues, autrement dit un point d'inflexion à tangente horizontale. De là, la forme représentée par la *fig.* 4.

Fig. 4.



Pour déterminer les tangentes horizontales, il suffit d'ailleurs de faire $h = 1$ dans l'équation (6) qui devient alors

$$t^3 - 27t + 54 = 0$$

ou

$$(t-3)^2(t+6) = 0.$$

Les abscisses des points correspondants étant données par

$$x = \frac{1}{t-2},$$

on a, pour l'abscisse du point d'inflexion I à tangente horizontale

$$x = 1,$$

et pour l'abscisse du second point J à tangente horizontale

$$x = -\frac{1}{8}.$$

Les ordonnées correspondantes sont, en vertu de l'équation (2) où l'on fait $z = 1$,

$$y = 1,$$

et

$$y = -80.$$

En résumé, la surface (M), ayant à l'infini une droite triple dans le plan Oyz et une droite simple dans le plan Oxz, est coupée par des plans de cote h par rapport au plan Oxy suivant des courbes dont la forme varie, ainsi que l'indique le Tableau suivant :

$h < 0$ .... *fig.* 1,
$h = 0$ .... *fig.* 3,
$0 < h < \frac{27}{32}$ .... *fig.* 2,
$h = \frac{27}{32}$ .... *fig.* 2',
$\frac{27}{32} < h < 1$ .... *fig.* 2''

$$h = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{fig. } 4,$$

$$1 < h < \frac{3^7}{2^{11}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{fig. } 2''',$$

$$h > \frac{3^7}{2^{11}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{fig. } 2^{\text{IV}}.$$