NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 435-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__435_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1772.

(1897, p. 340.)

Trouver le lieu des points M *tels qu'en menant à une ellipse les tangentes qui la touchent en* A *et* B, *le cercle circonscrit au triangle* MAB *soit tangent à l'ellipse.*

Même question pour la parabole. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soit donnée l'ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)(y + mx + n) = 0,$$

représente une conique qui passe par les points de rencontre de (1) avec deux sécantes, dont l'une est la polaire de M (α, β). La condition pour que l'autre soit tangente à (1) et, par suite, à (2) est

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2.$$

Pour que (2) passe par M, il faut que

$$1 + \lambda(\beta + m\alpha + n) = 0.$$

Enfin (2) sera un cercle, si l'on a

$$\frac{1 + m\alpha\lambda}{a^2} = \frac{1 + \beta\lambda}{b^2}$$

et

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2} = 0.$$

En éliminant λ, m et n entre ces quatre dernières équations, on a la résultante

$$a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2)$$

ou

$$\rho^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta), \tag{3}$$

qui représente le lieu cherché.

Mais en multipliant (3) avec l'équation de (1) en coordonnées polaires,

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

on a

$$\rho\rho_1 = a^2 - b^2.$$

On en conclut que les courbes (1) et (3) sont transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

Le même calcul, appliqué à la parabole $y^2 - 2px = 0$, donne pour résultante la parabole

$$y^2 = 2p(p - x),$$

qui n'est autre que la proposée retournée du côté des x négatives, et dont le sommet est transporté au point

$$(y = 0, x = p).$$